

1 Componentes y módulo

Un vector en el plano se expresa por sus componentes: $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

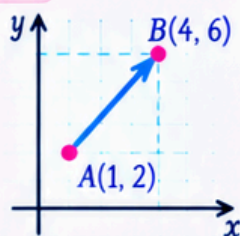
El módulo de $u = (u_1, u_2)$ es

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Ejemplo: $A = (1, 2)$, $B = (4, 6)$

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1, 6 - 2) = (3, 4)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$



3 Producto escalar

El producto escalar de $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ es

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 \equiv \|u\| \|v\| \cos \theta.$$

Ejemplo:

Si $u = (2, 1)$ y $v = (1, -2)$,

$$u \cdot v = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0.$$

Dos vectores no nulos son perpendiculares si y solo si su producto escalar es 0.

5 Bases y combinación lineal

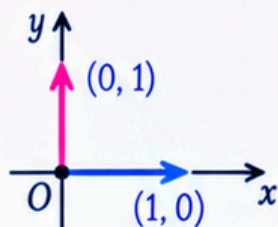
Un vector u puede escribirse como combinación lineal de otros dos vectores a y b :

$$u = \alpha a + \beta b \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Forman una base del plano dos vectores no paralelos.

Ejemplo: En la base canónica,

$$(3, 2) = 3(1, 0) + 2(0, 1).$$



Todo vector del plano se puede expresar de forma única como combinación lineal de una base.

Vectores para modelizar y resolver problemas del plano

Mismas herramientas, grandes aplicaciones



2 Operar con vectores

La suma de vectores $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ es

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

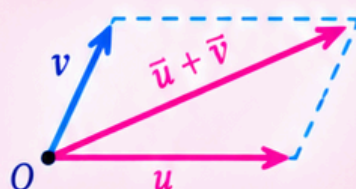
El producto de un vector por un número real λ es

$$\lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2).$$

La resta se define como

$$u - v = u + (-v).$$

Regla del paralelogramo para la suma:



La suma $u + v$ es la diagonal del paralelogramo con lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

4 Ángulos y paralelismo

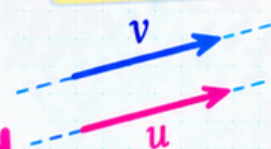
Si u y v son vectores no nulos, el ángulo θ entre ellos cumple

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}.$$

Dos vectores son paralelos si y solo si

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0.$$

No dividas por componentes que puedan valer 0.



Si son paralelos, tienen la misma dirección (o la contraria).

6 Puntos y aplicaciones

Punto medio del segmento que une A y B :

$$M = \frac{A+B}{2}.$$

Distancia entre dos puntos:

$$d(A, B) = \|B - A\|.$$

Vector unitario (de módulo 1) en la dirección de u :

$$\hat{u} = \frac{u}{\|u\|} \quad \text{si } u \neq 0.$$

Ejemplo: Si $u = (3, 4)$, entonces

$$\hat{u} = \frac{(3, 4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Los vectores unitarios tienen módulo 1 y la misma dirección que $\vec{u}$.