

1 Unidad imaginaria

Definición

La unidad imaginaria es el número i tal que:

$$i^2 = -1$$

Potencias de i (ciclo de 4)

$$i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i$$

$$i^4 = 1 \quad i^{4n} = 1 \quad i^{4n+1} = i \quad i^{4n+2} = -1 \\ i^{4n+3} = -i \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Cualquier potencia de i se puede reducir a 1, i , -1 o $-i$.

3 Operaciones

Suma y resta

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

Multiplicación

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

División

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} \quad (c + di \neq 0)$$

Conjugado

Si $z = a + bi$, su conjugado es:

$$\bar{z} = a - bi$$

- $z + \bar{z} = 2a$ (real)
- $z - \bar{z} = 2bi$ (imaginario puro)

5 Forma polar y trigonométrica

Todo número complejo ($z \neq 0$) se puede escribir como:

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

donde:

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta = \arg(z)$

Relación entre formas

$$a = r \cos \theta \\ b = r \operatorname{sen} \theta$$

$$z = a + bi \iff \\ z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

2 Forma binómica

Todo número complejo se escribe de forma única como:

$$z = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

- a : parte real $\rightarrow \operatorname{Re}(z) = a$
- b : parte imaginaria $\rightarrow \operatorname{Im}(z) = b$

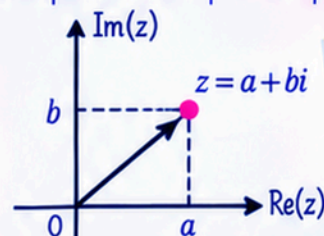
i no es un número real, pero a y b sí.

Ejemplos

- $z = 3 - 2i \rightarrow \operatorname{Re}(z) = 3, \operatorname{Im}(z) = -2$
- $z = -5 + 4i \rightarrow \operatorname{Re}(z) = -5, \operatorname{Im}(z) = 4$
- $z = 2i \rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 2$
- $z = 7 \rightarrow \operatorname{Re}(z) = 7, \operatorname{Im}(z) = 0$ (número real)

4 Representación gráfica

Se representa en el plano complejo:



Eje horizontal: parte real
Eje vertical: parte imaginaria

Módulo (o valor absoluto)

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Representa la distancia del punto al origen.

Argumento

$$\theta = \arg(z)$$

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Ángulo que forma el vector con el eje real.

6 Potencias y raíces

Fórmula de De Moivre

Si $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, entonces:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Raíces n -ésimas

Las n raíces de un complejo no nulo $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ son:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right) \\ k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Las raíces están equiespaciadas en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$.