

1 FORMA INDETERMINADA $\frac{0}{0}$

Aparece cuando al sustituir directamente se obtiene $0/0$. Se resuelve:

- Factorizando y simplificando (polinomios).
- Racionalizando (con raíces).
- Reduciendo a común denominador.
- Usando identidades notables.

Ejemplo (polinomios):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0}$$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

Ejemplo (con raíces):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{0}{0}$$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

Recuerda: $(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$
El conjugado elimina la raíz.

4 FORMA INDETERMINADA $\infty - \infty$

Aparece cuando se resta dos expresiones que tienden a ∞ . Se resuelve con denominador común, racionalizando o simplificando.

- Poner en el mismo denominador.
- Racionalizar (si hay raíces).
- Desarrollar y simplificar.

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \infty - \infty$

Racionalizamos:

$$(\sqrt{x^2 + x} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$\text{Dividimos por } x: = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

Racionalizar suele ser la técnica más útil en este tipo de indeterminaciones.

6 FORMA INDETERMINADA 1^∞

Aparece cuando $f(x) \rightarrow 1$ y $g(x) \rightarrow \infty$. Se resuelve usando logaritmos.

- Tomamos logaritmos.
- Utilizamos el límite notable.

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1^\infty$

$$\text{Tomamos logaritmos: } y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Límite notable: } \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\text{Entonces, } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = 1 \Rightarrow y = e^1 = e$$

$$\text{Por tanto, } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Este límite es muy importante y aparece con frecuencia.

2 FORMA INDETERMINADA $\frac{\infty}{\infty}$

Aparece cuando al sustituir directamente se obtiene ∞/∞ . Se resuelve comparando grados, dividiendo por la mayor potencia o simplificando.

- Si son polinomios: comparar grados.
- Si tienen el mismo grado: dividir por la mayor potencia.
- Si hay raíces: racionalizar o dividir.

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x}{x^2 - x} = \frac{\infty}{\infty}$

Dividimos por x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2 + 0}{1 - 0} = 2$$

Si el grado del numerador = grado del denominador $\rightarrow$ se divide por la mayor potencia.
Si son polinomios: mayor grado domina.

3 FORMA INDETERMINADA $0 \cdot \infty$

Aparece cuando al sustituir se obtiene $0 \cdot \infty$. Se transforma en un cociente.

- Escribimos como fracción (o hacemos un cambio de variable).
- Resolvemos el nuevo límite ($0/0$ o ∞/∞).

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = 0 \cdot (-\infty)$

$$\text{Escribimos como cociente: } x \cdot \ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

$$\text{Hacemos el cambio } t = \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow 0^+ \Rightarrow t \rightarrow +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\ln t}{t}$$

$$\text{Usamos el límite notable: } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

$$\text{Por tanto, } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0.$$

5 FORMA INDETERMINADA 0^0

Aparece en expresiones del tipo $f(x)g(x)$ cuando $f(x) \rightarrow 0$ y $g(x) \rightarrow 0$. Se resuelve pasando a forma exponencial o usando logaritmos.

- Tomamos logaritmos.
- Resolvemos el límite de $g(x) \ln(f(x))$.

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 0^0$

$$\text{Tomamos logaritmos: } y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$$

Calculamos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad \text{Límite notable: } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1$$

$$\text{Por tanto, } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

También se puede escribir $x^x = e^{x \ln x}$.

INDETERMINACIONES EN LÍMITES

Tipos, técnicas y ejemplos

1º BACHILLERATO

C2 Academia

Consejos generales

- Identifica primero la forma indeterminada.
- Elige la técnica más adecuada.
- Simplifica todo lo que puedas.
- Comprueba el resultado.
- Si es necesario, utiliza límites laterales.

7 FORMA INDETERMINADA ∞^0

Aparece cuando $f(x) \rightarrow \infty$ y $g(x) \rightarrow 0$. Se resuelve usando logaritmos.

- Tomamos logaritmos.
- Resolvimos el límite de $g(x) \ln(f(x))$.

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \infty^0$

$$\text{Tomamos logaritmos: } y = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \ln x$$

$$\text{Límite notable: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{Entonces, } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1$$

$$\text{Por tanto, } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

También se puede escribir $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$.

8 OTRAS INDETERMINACIONES

Algunas expresiones combinadas pueden dar lugar a indeterminaciones menos frecuentes. Se transforman con las técnicas anteriores.

Ejemplo 1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0}{0}$

Usamos el desarrollo: $e^x - 1 \approx x$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Ejemplo 2: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$

Usamos la identidad: $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Conoce bien las identidades y límites notables.

Mismas dudas,
mayores resultados

C2 Academia