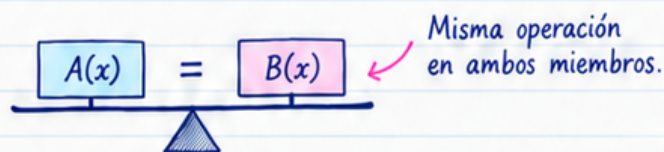


# Ecuaciones Polinómicas y racionales

1.º Bachillerato

## 1. Resolver una ecuación

Encontrar los valores de  $x$  que hacen verdadera la igualdad. Trabajamos en  $\mathbb{R}$ .



Sumar o restar lo mismo; multiplicar o dividir por un número distinto de cero.

## 3. Segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

| Discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ | Soluciones reales |
|------------------------------------|-------------------|
| $\Delta > 0$                       | Dos distintas     |
| $\Delta = 0$                       | Una doble         |
| $\Delta < 0$                       | Ninguna           |

Ejemplo:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \\ \rightarrow S = \{2, 3\}.$$

## 5. Grado superior

Factoriza.  $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$  o  $B = 0$ .

Ejemplo:

$$x^3 - 4x = x(x-2)(x+2) = 0 \\ \rightarrow S = \{-2, 0, 2\}.$$

Ruffini ayuda si encuentras una raíz  $r$ : el factor es  $(x-r)$ .

## 7. Racionales: primero el dominio

- ① Excluye los ceros de los denominadores. ② Multiplica por el m.c.m. ③ Resuelve y comprueba.

Ejemplo:

$$\frac{1}{x-1} + 1 = \frac{2}{x-1}, \quad x \neq 1 \rightarrow 1+x-1=2 \rightarrow x=2.$$

Las soluciones excluidas por el dominio no son válidas.

## 2. Primer grado

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0) \rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Ejemplo:

$$3(x-2) + 4 = 2x + 1 \rightarrow 3x - 6 + 4 = 2x + 1 \\ \rightarrow 3x - 2 = 2x + 1 \rightarrow x = 3$$

$0 = 0$ : identidad (todos los valores permitidos).

$0 = 5$ : incompatible (sin solución).

## 4. Incompletas

- Sin término independiente:

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0.$$

Ejemplo:

$$2x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(2x-6) = 0 \\ \rightarrow S = \{0, 3\}.$$

- Sin término lineal:

$$ax^2 + c = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Ejemplo:

$$3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow S = \{-2, 2\}.$$

¡No divides entre  $x$ : podrías perder  $x=0$ !

## 6. Bicuadradas

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \rightarrow t = x^2, \text{ con } t \geq 0.$$

Ejemplo:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \\ \rightarrow t = 1, 4 \rightarrow x = \pm 1, \pm 2.$$

Descarta  $t < 0$ ; si  $t = 0$ ,  $x = 0$ .

### 1. Ecuaciones con radicales

La incógnita está dentro de una raíz. En raíces de índice par, el radicando debe ser  $\geq 0$ .

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow A(x) = B(x)^2 \text{ y } B(x) \geq 0.$$

### 3. Ejemplo con una raíz

$$\sqrt{x+2} = x$$

Restricciones:  $x \geq 0$ .

$$x+2 = x^2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0 \rightarrow \text{candidatos: } 2, -1.$$

$$x = 2: \sqrt{4} = 2 \quad \checkmark$$

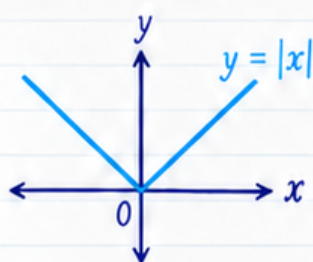
$$x = -1: \sqrt{1} \neq -1 \quad \times$$

$$S = \{2\}.$$

### 5. Qué significa el valor absoluto

$$|A| = \begin{cases} A & \text{si } A \geq 0 \\ -A & \text{si } A < 0 \end{cases}$$

Representa una distancia:  
nunca es negativo.



$$k < 0: |A| = k \text{ no tiene solución.}$$

$$k \geq 0: |A| = k \Leftrightarrow A = k \text{ o } A = -k.$$

### 7. Si el otro miembro también depende de $x$

$|A(x)| = B(x)$ : exige  $B(x) \geq 0$  y plantea  $A(x) = B(x)$  o  $A(x) = -B(x)$ .

**Ejemplo:**  $|x-1| = x+1 \rightarrow$  restricción  $x \geq -1$ .

$$x-1 = x+1 \rightarrow \text{imposible. } x-1 = -x-1 \rightarrow x = 0.$$

$$\text{Comprobación: } |-1| = 1 \quad \checkmark \rightarrow S = \{0\}.$$

### 2. Cómo resolverlas

1. Establece restricciones.
2. Aísla una raíz.
3. Eleva a la potencia adecuada.
4. Resuelve.
5. Comprueba en la ecuación original.

Al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones extrañas.

### 4. Ejemplo con dos raíces

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2; \text{ dominio: } x \geq 3.$$

$$\sqrt{x+5} = 2 + \sqrt{x-3}$$

$$x+5 = 4 + 4\sqrt{x-3} + x-3$$

$$4 = 4\sqrt{x-3} \rightarrow \sqrt{x-3} = 1 \rightarrow x = 4.$$

$$\text{Comprobación: } \sqrt{4+5} - \sqrt{4-3} = 3 - 1 = 2 \quad \checkmark$$

$$S = \{4\}.$$

### 6. Ejemplo: separar dos casos

$$|2x-3| = 5$$

$$2x-3 = 5 \rightarrow x = 4 \quad | \quad 2x-3 = -5 \rightarrow x = -1$$

$$S = \{-1, 4\}.$$

Con varios valores absolutos, separa intervalos por los ceros de sus expresiones.

# Ecuaciones

## Exponenciales y logarítmicas

1.º Bachillerato

### 1. Exponenciales: igualar bases

Para  $a > 0$  y  $a \neq 1$ :

$$a^u = a^v \Leftrightarrow u = v.$$

$$2^{x+1} = 8 = 2^3 \rightarrow x+1 = 3 \rightarrow x = 2.$$

Si no se pueden igualar bases:

$$a^x = b \quad (b > 0) \rightarrow x = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

$$3^x = 7 \rightarrow x = \frac{\ln 7}{\ln 3}.$$

### 2. Cambio de variable

Si aparecen  $a^{2x}$  y  $a^x$ :  $t = a^x > 0$ .

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \rightarrow t = 1 \text{ o } t = 4.$$

$$2^x = 1 \rightarrow x = 0; \quad 2^x = 4 \rightarrow x = 2.$$

$$S = \{0, 2\}.$$

### 3. Logaritmos: condiciones

Base  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ; argumentos siempre positivos.

$$\log_a U = \log_a V \Leftrightarrow U = V, \text{ con } U > 0 \text{ y } V > 0.$$

$$\log_a U = c \Leftrightarrow U = a^c, \text{ con } U > 0.$$

Aquí  $\log$  es base 10 y  $\ln$  es base  $e$ .

### 4. Propiedades que necesitas

| Operación | Propiedad                                               |
|-----------|---------------------------------------------------------|
| Suma      | $\log_a U + \log_a V = \log_a (UV)$                     |
| Resta     | $\log_a U - \log_a V = \log_a \left(\frac{U}{V}\right)$ |
| Potencia  | $k \log_a U = \log_a (U^k)$                             |

Con  $U > 0$  y  $V > 0$ .

⚠  $\log(U+V)$  no es  $\log U + \log V$ .

### 5. Ejemplo: suma de logaritmos

$$\log(x-1) + \log(x+1) = \log 8$$

Dominio:  $x > 1$ .

$$\log[(x-1)(x+1)] = \log 8$$

$$x^2 - 1 = 8 \rightarrow x = \pm 3.$$

Solo  $x = 3$  cumple el dominio.

$$S = \{3\}.$$

### 6. Dos métodos más

A  $\ln(2x-1) = 2$ , dominio:  $x > \frac{1}{2}$ .

$$2x-1 = e^2 \rightarrow x = \frac{e^2+1}{2} \quad \checkmark$$

B  $(\log x)^2 - 3\log x + 2 = 0$ ,  $x > 0$ .

$$t = \log x \rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \rightarrow t = 1, 2.$$

$$\log x = 1 \rightarrow x = 10; \quad \log x = 2 \rightarrow x = 100.$$

$$S = \{10, 100\}.$$

### 7. Elige el método y comprueba

|                         |                                          |
|-------------------------|------------------------------------------|
| Polinómica              | factorizar o fórmula.                    |
| Racional                | dominio y m.c.m.                         |
| Radical                 | aislar, elevar y comprobar.              |
| Exponencial/logarítmica | bases, propiedades o cambio de variable. |

Dominio  $\rightarrow$  método  $\rightarrow$  candidatos  $\rightarrow$  comprobación  $\rightarrow$  solución.