2022 JUNIO A4

Calcula $\int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)}\,dx$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \qquad \text{grado } P(x) < \text{grado } Q(x)$$

$$(x+1)(x^2-x-2)=0 \begin{cases} x+1=0 \longrightarrow x=-1 \\ x^2-x-2=0 \longrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-4(1)(-2)}}{2} \longrightarrow x=\begin{cases}2\\-1\end{cases}\end{cases}$$

$$\frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$7x+13 = A(x+1)^2+B(x-2)(x+1)+C(x-2)$$

- $x=-1 \longrightarrow 6=-3C \longrightarrow C=-2$
- $x=2 \longrightarrow 27=9A \longrightarrow A=3$

Tengo que inventarme un último valor de x para determinar el valor de B.

- $x=0 \longrightarrow 13 = A-2B-2C \longrightarrow 13=3-2B+4 \longrightarrow B=-3$

$$\int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)}\,dx = \int \frac{3}{(x-2)}+\frac{-3}{(x+1)}+\frac{-2}{(x+1)^2}\,dx = 3\ln|x-2|-3\ln|x+1|+\frac{2}{(x+1)}+K$$

SOLUCIÓN

$\rightarrow -3\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}+3\ln|x-2|+k$

JULIO 2022 A4

calcula $\int \ln(x^2-1)\ dx$

$\int \ln(x^2-1)\,dx$ integral por partes

u ↓ A L P E S

$u = \ln(x^2-1) \longrightarrow du = \frac{2x}{x^2-1}dx$

$dv = dx \longrightarrow v = x$

$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$

$= \ln(x^2-1)\cdot x - \int x\cdot\frac{2x}{x^2-1}dx$

$= x\cdot\ln(x^2-1) - \int\frac{2x^2}{x^2-1}dx$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 & x^2-1 \\ \hline -2x^2+2 & 2 \\ \hline \quad 2 & \end{array}$$

$= x\cdot\ln(x^2-1) - \int 2 + \frac{2}{x^2-1}dx$

$= x\cdot\ln(x^2-1) - 2x - 2\int\frac{1}{x^2-1}dx$

$x^2-1=0 \longrightarrow x=\pm 1$

$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)}$

$1 = A(x-1) + B(x+1)$

- $x=1 \longrightarrow 1 = 2B \longrightarrow B = \frac{1}{2}$
- $x=-1 \longrightarrow 1 = -2A \longrightarrow A = -\frac{1}{2}$

$\int\frac{1}{x^2-1}dx = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + K$

$= x\cdot\ln(x^2-1) - 2x - 2\left[-\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1|\right] + K$

$x\cdot\ln|x^2-1| - 2x + \ln|x+1| - \ln|x-1| + K$

JUNIO 2021 B4

Calcular, explicando los métodos utilizados,

$$I = \int (x+2)\sin(2x)\ dx$$

$$J = \int \frac{x+7}{x^2-4x-5}\,dx$$

La primera integral, es una integral por partes...

$$\int (x+2)\sin(2x)\,dx = (x+2)\cdot\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right] - \int -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx = (*)$$

$$u = (x+2) \longrightarrow du = dx$$

$$dv = \sin 2x\,dx \longrightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$(*)\ -\frac{1}{2}(x+2)\cdot\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = -\frac{1}{2}(x+2)\cdot\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin 2x + k$$

La segunda integral, es una integral racional...

$$\int \frac{x+7}{x^2-4x-5}\,dx$$

$$x^2-4x-5=0 \longrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4(1)(-5)}}{2} \longrightarrow x = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

$$\frac{x+7}{x^2-4x-5} = \frac{A}{(x-5)} + \frac{B}{(x+1)}$$

$$x+7 = A(x+1) + B(x-5)$$

- $x=-1 \longrightarrow 6 = -6B \longrightarrow B=-1$
- $x=5 \longrightarrow 12 = 6A \longrightarrow A=2$

$$\int \frac{x+7}{x^2-4x-5}\,dx = \int \frac{2}{(x-5)}\,dx + \int \frac{-1}{(x+1)}\,dx = 2\ln|x-5| - \ln|x+1| + k$$

JULIO 2021 B4

Calcular $\int x \ln(x+1)\ dx$, explicando el método utilizado.

integración por partes... tenemos la multiplicación de dos funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \ln(x+1)$ para resolver la integral este es el metodo adecuado...

$$\int x \cdot \ln(x+1)\, dx = (*)$$

$$u = \ln(x+1) \longrightarrow du = \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$dv = x\, dx \longrightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$(*) = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+1}\, dx$$

integral racional

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x+1 \\ \hline -x^2 - x & x-1 \\ \hline -x & \\ +x+1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^2}{x+1}\, dx = \int x - 1 + \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int x - 1 + \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| \right] + K$$

simplificando

$$\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln|x+1| + K$$

$$\left(\frac{x^2 - 1}{2}\right) \ln|x+1| - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + K$$

JUNIO 2020 B4

Calcular las integrales indefinidas ***I* y *J*** explicando los métodos usados para su resolución.

$$I = \int x\cos(2x)\ dx$$

$$J = \int \frac{dx}{x^2+2x-3}$$

Integral por partes

$$\int x\cdot\cos(2x)\,dx = x\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2x) - \int \frac{1}{2}\cdot\sin(2x)\,dx = (*)$$

$$u = x \longrightarrow du = dx$$

$$dv = \cos(2x)\,dx \longrightarrow v = \frac{1}{2}\cdot\sin(2x)$$

$$(*)\quad \frac{x}{2}\cdot\sin(2x) - \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx = \frac{x}{2}\cdot\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + K$$

Integral racional

$$\int \frac{dx}{x^2+2x-3} =$$

$$x^2+2x-3=0 \longrightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{4-4(1)(-3)}}{2} \longrightarrow x = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)} = \int \frac{A}{(x-1)}\,dx + \int \frac{B}{(x+3)}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + K$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$1 = A(x+3) + B(x-1)$$

- $x = 1 \longrightarrow 1 = 4A \longrightarrow A = \frac{1}{4}$
- $x = -3 \longrightarrow 1 = -4B \longrightarrow B = -\frac{1}{4}$

JULIO 2020 B4

Explicar en qué consiste el método de integración por partes y aplicarlo para calcular la integral.

$$\int x\,cos\,(3x)dx$$

Aplicamos la regla de ALPES para saber a qué función debemos de llamar u y a cuál dx

$$\begin{matrix} u = x \\ dv = \cos 3x \; dx \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} du = dx \\ v = \frac{1}{3} sen\; 3x \end{matrix}$$

Cuando ya tienes el procedimiento realizado simplemente tienes que aplicar la siguiente regla Nemotécnica: Un Día Vi Una Vieja Vestida De Uniforme

$$\int x\,cos\,(3x)dx = \frac{x \cdot sen\;3x}{3} - \int \frac{1}{3} sen\;3x\;dx = \boxed{\frac{x \cdot sen\;3x}{3} + \frac{1}{9}\cos 3x + k}$$

JUNIO 2019 A4

Calcula $\int xe^{-4x}\,dx$, explicando el proceso utilizado para dicho calculo.

Identifica el tipo de integral con el que vas a trabajar, se trata de una integral por partes. Este tipo de integración lo tienes que hacer cuando tienes un producto de dos funciones.

Tienes que utilizar el método ALPES tal y como te he enseñado en el resumen del tema:

$$u = x \rightarrow du = 1dx$$

$$dv = e^{-4x} \rightarrow v = -\frac{1}{4}e^{-4x}$$

Ahora cuando ya tienes los cálculos hechos tienes que aplicar la regla nemotécnica: Un Día Vi Una Vaca Vestida De Uniforme:

$$\int xe^{-4x}dx = -\frac{xe^{-4x}}{4} - \int -\frac{1}{4}e^{-4x}\,dx = -\frac{xe^{-4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{16} + C$$

JULIO 2019 B4

Calcular $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} dx$ explicando el proceso utilizado para dicho calculo.

Cuando tienes una integral racional y el grado del denominador es superior al grado del numerador, tienes que igualar a cero el denominador para sacar las raíces, en este caso es inmediato:

$$(x+1)(x+3) = 0 \rightarrow x = -1\,;\, x = -3$$

Y ahora empieza el procedimiento:

$$\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} dx = \int \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+3)} dx$$
$$\frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+3)}$$
$$8x+7 = A(x+3) + B(x+1)$$

Ahora le tienes que dar a la x los valores de las raíces que has calculado:

- $x = -1 \rightarrow -1 = 2A \rightarrow A = \frac{-1}{2}$
- $x = -3 \rightarrow -17 = -2B \rightarrow B = \frac{17}{2}$

Cuando ya tienes el valor de los parámetros A y B:

$$\int \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+3)} dx = \int \frac{\frac{-1}{2}}{(x+1)} + \frac{\frac{17}{2}}{(x+3)} dx = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{17}{2}\ln|x+3| + C$$

JUNIO 2018 A4

Calcular la siguiente integral indefinida:

a) $\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}\, dx$

Como el grado del polinomio del denominador es mayor:

$$x(x+1)^2 = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -1\ (doble) \end{cases}$$

Hemos hallado las raíces del denominador, ahora:

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}\, dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}\, dx =$$

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$2x-1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

$$x = 0 \to -1 = A$$

$$x = -1 \to -3 = -C \to C = 3$$

$$Ahora\ nos\ tenemos\ que\ inventar\ otro\ valor\ de\ x; x = 1 \to 1 = 4A + 2B + C \to B = 1$$

PROCEDIMIENTO

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}\, dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}\, dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{(x+1)} + \frac{3}{(x+1)^2}\, dx$$

$$= -\ln|x| + \ln|x+1| - \frac{3}{(x+1)} + k$$

JULIO 2018 A4

Calcula la siguiente integral:

$$\int x^2 e^{-3x} dx$$

$$\begin{matrix} u = x^2 \\ dv = e^{-3x} dx \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} du = 2x\,dx \\ v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{matrix}$$

$$\int x^2 e^{-3x} dx = \frac{x^2 e^{-3x}}{-3} + \frac{2}{3}\int x e^{-3x} dx =$$

$$\begin{matrix} u = x \\ dv = e^{-3x} dx \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} du = dx \\ v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{matrix}$$

$$\int x^2 e^{-3x} dx = \frac{x^2 e^{-3x}}{-3} + \frac{2}{3}\int x e^{-3x} dx = \frac{x^2 e^{-3x}}{-3} + \frac{2}{3}\left[\frac{x e^{-3x}}{-3} + \frac{1}{3}\int e^{-3x} dx\right] =$$

$$\frac{x^2 e^{-3x}}{-3} - \frac{2x e^{-3x}}{9} - \frac{2e^{-3x}}{27} + k$$

JUNIO 2017 B4

Resolver la siguiente integral:

a) $\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}\,dx$

Como el grado del polinomio del denominador es mayor:

$$x^3-2x^2+x=0 \rightarrow x(x^2-2x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=1 \end{cases}$$

Hemos hallado las raíces del denominador, ahora:

$$\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}\,dx = \int \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}\,dx$$

PROCEDIMIENTO

$$\frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$x^2+5=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$$
$$x=0 \rightarrow A=5$$
$$x=1 \rightarrow C=6$$
$$x=-1 \rightarrow 6=4A+2B-C \rightarrow B=-4$$

Ahora nos tenemos que inventar otro valor de x ya que estas trabajando con raices multiples

$$\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}\,dx = \int \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{5}{x}+\frac{-4}{(x-1)}+\frac{6}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= 5\ln|x|-4\ln|x-1|-\frac{6}{(x-1)}+k$$

JULIO 2017 A4

Resolver la siguiente integral:

a) $\int (x+5)e^{3x}\,dx$

Cuando tenemos una multiplicación de dos funciones, normalmente estamos trabajando con una integral por partes:

Aplicamos la regla que ya conoces; ALPES.

$$u = (x+5) \rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{3x}dx \rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$$

$$\int (x+5)e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}(x+5) - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}(x+5) - \frac{1}{9}e^{3x} + k$$

$$e^{3x}\left[\frac{1}{3}(x+5) - \frac{1}{9}\right] + k = e^{3x}\left[\frac{1}{3}x + \frac{14}{9}\right] + k$$

JUNIO 2016 B4

Resolver la siguiente integral:

a) $\int \frac{2x^2+5x-1}{x(x^2+x-2)}\ dx$

Como el grado de abajo es de grado superior al de arriba:

$$x(x^2+x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x^2+5x-1}{x(x^2+x-2)}\ dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+2)}\ dx =$$

$$2x^2+5x-1 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$

$$x=0 \rightarrow -1=-2A \rightarrow A=\frac{1}{2}$$
$$x=1 \rightarrow 6=3B \rightarrow B=2$$
$$x=-2 \rightarrow -3=6C \rightarrow C=-\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{1/2}{x} + \frac{2}{(x-1)} + \frac{-1/2}{(x+2)}\ dx = \frac{1}{2}\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + k$$

JULIO 2016 A4

Resolver las siguientes integrales:

a) $\int \frac{5}{x^2-3x+2}\ dx$

Tenemos que igualar a cero el denominador ya que, el grado es mayor que el del numerador:

$$x^2-3x+2=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\int \frac{5}{x^2-3x+2}\ dx = \int \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}\ dx$$

$$5 = A(x-2)+B(x-1)$$

$$x=1 \rightarrow 5=-A \rightarrow A=-5$$

$$x=2 \rightarrow 5=B$$

$$\int \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}\ dx\ = \int \frac{-5}{x-1}+\frac{5}{x-2}\ dx = -5\ln(x-1)+5\ln(x-2)+k$$

b) $\int (2x+1)^4\, dx$

$$\int (2x+1)^4\ dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^4\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^5}{5}+k = \frac{(2x+1)^5}{10}+k$$

JULIO 2015 A4

Calcula la siguiente integral indefinida:

a) $\int \frac{2x^3+x-1}{x^2-5x} \; dx$

Como el grado del polinomio de arriba es mayor que el de abajo:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + \quad\; +x-1 & x^2-5x \\ \hline -2x^3+10x^2 \quad\quad\quad & 2x+10 \\ +10x^2+x-1 & \\ -10x^2+50x \quad & \\ \hline +51x-1 & \end{array}$$

$$\int \frac{2x^3+x-1}{x^2-5x} \; dx = \int 2x+10+\frac{51x-1}{x^2-5x} \, dx = \int 2x+10 \, dx + \int \frac{51x-1}{x^2-5x} \, dx$$

Tenemos varias integrales, por un lado, una integral inmediata y por otro lado una integral por partes:

$$x^2-5x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=5 \end{cases}$$

$$\int 2x+10 \, dx + \int \frac{51x-1}{x^2-5x} \, dx = \int 2x+10 \, dx + \int \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-5)} \, dx$$

$$\frac{51x-1}{x^2-5x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-5)}$$

$$51x-1 = A(x-5)+Bx$$

$$x=0 \rightarrow -1=-5A \rightarrow A=\frac{1}{5}$$

$$x=5 \rightarrow 254=5B \rightarrow B=\frac{254}{5}$$

$$\int 2x+10 \, dx + \int \frac{\frac{1}{5}}{x}+\frac{\frac{254}{5}}{(x-5)} \, dx = x^2+10x+\frac{1}{5}\ln(x)+\frac{254}{5}\ln(x-5)+k$$

JUNIO 2014 B4

Calcular las integrales indefinidas que siguen, explicando el método de resolución:

a) $\int x \cdot \cos(3x) dx$

$$\int x \cdot \cos(3x) dx =$$

Tenemos que hacer una integración por partes:

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos(3x) \rightarrow v = \frac{1}{3} sen\,(3x)$$

$$\int x \cdot \cos(3x) dx = \frac{x}{3} sen\,(3x) - \frac{1}{3} \int sen\,(3x)\,dx = \frac{x}{3} sen\,(3x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + k$$

b) $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}\ dx$

Igualamos el denominador a cero para hallar sus raíces:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}\ dx = \int \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} dx$$

$$1 = A(x-1) + B(x+3)$$

$$x = -3 \rightarrow 1 = -4A \rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$x = 1 \rightarrow 1 = 4B \rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{-1/4}{x+3} + \frac{1/4}{x-1} dx = -\frac{1}{4} \ln(x+3) + \frac{1}{4} \ln(x-1) + k$$

JULIO 2014 B4

Hallar la integral indefinida explicando el método utilizado para dicho calculo:

a) $\int \frac{3x+7}{(x^2-3x+2)(x-3)}\ dx$

Tenemos que igualar a cero el denominador para hallar sus raíces:

$$(x^2-3x+2)(x-3)=0 \rightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

$$\int \frac{3x+7}{(x^2-3x+2)(x-3)}\ dx = \int \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}\ dx$$

$$3x+7 = A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$$

$$x=1 \rightarrow 10=2A \rightarrow A=5$$
$$x=2 \rightarrow 13=-B \rightarrow B=-13$$
$$x=3 \rightarrow 16=2C \rightarrow C=8$$

$$\int \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}\ dx = \int \frac{5}{x-1}+\frac{-13}{x-2}+\frac{8}{x-3}\ dx$$

$$5\ln(x-1)-13\ln(x-2)+8\ln(x-3)+k$$

JULIO 2013 B4 y JUNIO 2011

Explicar en qué consiste el método de integración por partes y aplicarlo para calcular las siguientes integrales:

a) $\int x \ln x \, dx$

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$
$$dv = x\, dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + k$$

a) $\int x \cos(2x) \, dx$

$$\begin{matrix} u = x \\ dv = \cos(2x) dx \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} du = dx \\ v = \frac{1}{2}\, sen\,(2x) \end{matrix}$$

$$\int x \cos(2x) \, dx = \frac{x}{2} sen\,(2x) - \frac{1}{2} \int sen\,(2x) dx = \frac{x}{2} sen\,(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + k$$

b) $\int x \sin(2x) \, dx$

$$u = x \rightarrow du = dx$$
$$dv = sen\,(2x) dx \rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$\int x\, sen\,(2x) dx = -\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx = -\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4}\, sen\,(2x) + k$$

JUNIO 2012 B4

Calcular las siguientes integrales:

a) $\int 2\,x^3 \ln(x)dx$

Aplicamos la regla ALPES para resolver esta integral, tal y como tenéis en los apuntes.

$$\begin{matrix} u = \ln x \\ dv = 2x^3 dx \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{1}{2}x^4 \end{matrix}$$

$$\int 2\,x^3 \ln(x)dx = \frac{x^4 \cdot \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^4}{x}dx = \frac{x^4 \cdot \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x^3\,dx = \frac{x^4 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^4}{8} + k$$

b) $\int \frac{x-2}{x^2-1}\,dx$

Como el grado del polinomio de abajo es mayor:

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x-2}{x^2-1}dx = \int \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)}dx$$

$$\frac{x-2}{x^2-1} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} \rightarrow x - 2 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$x = -1 \rightarrow -3 = -2B \rightarrow B = \frac{3}{2}$$

$$x = 1 \rightarrow -1 = 2A \rightarrow A = \frac{-1}{2}$$

$$\int \frac{x-2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{3/2}{(x-1)} + \frac{-1/2}{(x+1)}dx = \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + k$$

JULIO 2012 A4

Calcular la integral:

a) $\int \frac{5x-2}{x^2-4}\ dx$

Como el grado de abajo es mayor que el grado de arriba tenemos que igualar a cero el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4}\ dx = \int \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}\ dx$$

$$\frac{5x-2}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \rightarrow 5x - 2 = A(x-2) + B(x+2)$$

$$x = 2 \rightarrow 8 = 4B \rightarrow B = 2$$

$$x = -2 \rightarrow -12 = -4A \rightarrow A = 3$$

$$\int \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2}\ dx = 3\ln(x+2) + 2\ln(x-2) + k$$

JULIO 2011 A4 y JUNIO 2010

Hallar la integral indefinida explicando el método utilizado para el cálculo:

a) $\int \frac{3x^2+8x}{x^2+5x+6}\ dx$

Como los polinomios tienen el mismo grado, tenemos que hacer la división.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2+8x & x^2+5x+6 \\ \cline{2-2} -3x^2-15x-18 & 3 \\ \hline -7x-18 & \end{array}$$

$$\int \frac{3x^2+8x}{x^2+5x+6}\ dx = \int 3\ dx + \int \frac{-7x-18}{x^2+5x+6}\ dx$$

$$x^2+5x+6=0 \to \begin{cases} x=-2 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\int \frac{-7x-18}{x^2+5x+6}\ dx = \int \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+3)}\ dx$$

$$-7x-18 = A(x+3)+B(x+2) \to \begin{cases} x=-2 \to -4 = A \\ x=-3 \to 3 = -B \to B=-3 \end{cases}$$

$$\int 3\ dx + \int \frac{-4}{(x+2)} + \frac{-3}{(x+3)}\ dx\ = 3x - 4\ln(x+2) - 3\ln(x+3) + k$$

b) $\int \frac{x+8}{x^2+x-2}\ dx$

Igualamos la parte de debajo de la fracción a cero;

$$x^2+x-2=0 \to \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x+8}{x^2+x-2}\ dx = \int \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} dx$$

$$x+8 = A(x-1)+B(x+2)$$

$$x=-2 \to 6 = -3A \to A=-2$$
$$x=1 \to 9 = 3B \to B=3$$

$$\int \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} dx = \int \frac{-2}{x+2} + \frac{3}{x-1} dx = -2\ln(x+2) + 3(x-1) + k$$

JULIO 2010 B4

Explicar brevemente en que consiste el método de integración por partes, y aplicarlo para el cálculo de la integral indefinida que sigue:

a) $\int (2x+3)\sin(5x+7)\,dx$

Aplicamos ahora la regla de ALPES:

$$u = 2x + 3 \rightarrow du = 2dx$$

$$dv = \sin(5x+7) \rightarrow v = -\frac{1}{5}\cos(5x+7)$$

$$\int (2x+3)\sin(5x+7)\,dx \; = -\frac{1}{5}(2x+3)\cos(5x+7) + \frac{2}{5}\int \cos(5x+7)dx =$$

$$-\frac{1}{5}(2x+3)\cos(5x+7) + \frac{2}{25}sen\,(5x+7) + K$$