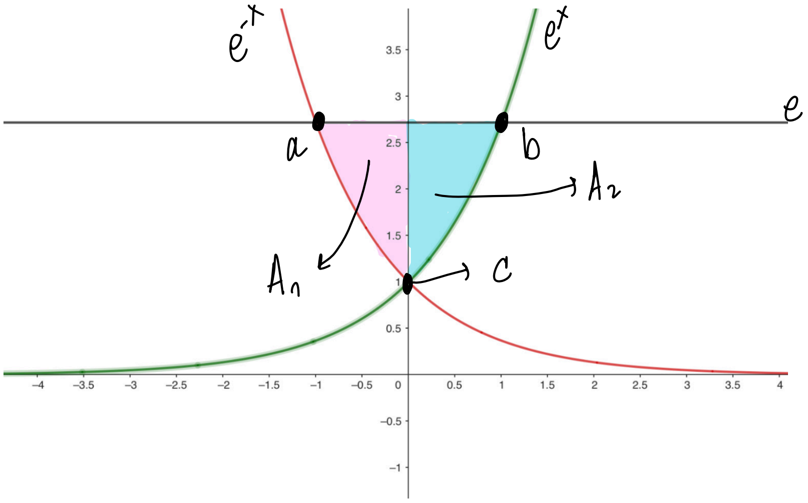
2022 JUNIO B4

Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ y la recta horizontal $y = e$, y calcula el área de ese recinto.

Lo primero que tienes que hacer es representar correctamente dichas funciones...



para determinar la integral, es importante conocer dichos puntos...

$$a \rightarrow \begin{cases} y = e \\ y = e^{-x} \end{cases} \rightarrow e^1 = e^{-x} \rightarrow 1 = -x \quad x = -1$$

$$b \rightarrow \begin{cases} y = e \\ y = e^{x} \end{cases} \rightarrow e^1 = e^{x} \rightarrow x = 1$$

$$c \rightarrow \begin{cases} y = e^x \\ y = e^{-x} \end{cases} \rightarrow e^x = e^{-x} \rightarrow x = -x \quad x = 0$$

Como podemos observar, el área va desde $x=-1$ hasta $x=1$ pero como por debajo del área tenemos dos funciones habrá que realizar el cálculo de dos áreas.

$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} e - e^{-x}\, dx = ex + e^{-x}\Big]_{-1}^{0} = 1\, u^2$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} e - e^{x}\, dx = ex - e^{x}\Big]_{0}^{1} = 1\, u^2$$

Por tanto,

$$A_T = 1 + 1 = 2\, u^2$$

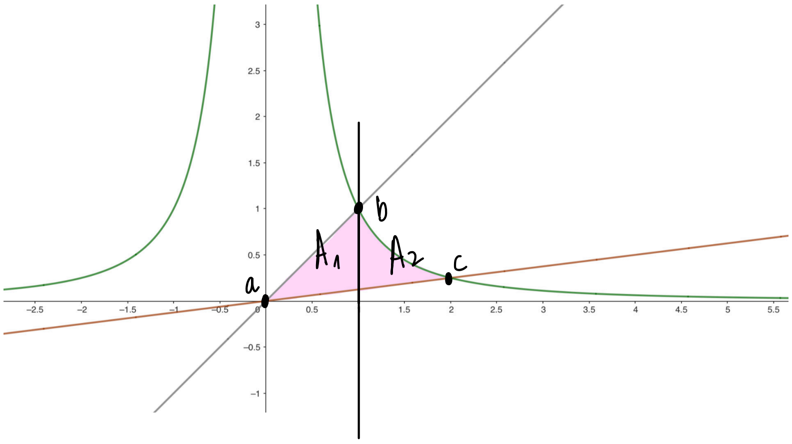
SOLUCIÓN

$A = \int_{-1}^{0}(e - e^{-x})\, dx + \int_{0}^{1}(e -. e^{x})\, dx = 2u^2$

JULIO 2022 B4

Dibujar el recinto del primer cuadrante limitado por las gráficas de las funciones
$f(x) = x$, $g(x) = \frac{x}{8}$ y $h(x) = \frac{1}{x^2}$ y calcula el área de ese recinto.

Tal y como hacemos en otras ocasiones... Representamos las funciones con las que estamos trabajando...



Para poder calcular el área primero tienes que calcular los puntos a, b y c...

$a \longrightarrow x=0$

$b \longrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases} \longrightarrow x = \frac{1}{x^2} \longrightarrow x^3 = 1 \longrightarrow x = 1$

$c \longrightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{8} \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases} \longrightarrow \frac{x}{8} = \frac{1}{x^2} \longrightarrow x^3 = 8 \longrightarrow x = 2$

Como por encima del área van dos funciones tenemos que dividir en dos partes...

$$A_1 = \int_0^1 x - \frac{x}{8}\, dx = \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{16}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}\, u^2$$

$$A_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} - \frac{x}{8}\, dx = \left.-\frac{1}{x} - \frac{x^2}{16}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{2} - \frac{4}{16}\right] - \left[-1 - \frac{1}{16}\right] = \left[\frac{-12}{16}\right] + 1 + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}\, u^2$$

$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{7}{16} + \frac{5}{16}\, u^2 = \frac{12}{16}\, u^2 = \frac{3}{4}\, u^2$$

SOLUCIÓN

$A = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{8}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{8}\right) dx = \frac{3}{4}\, u^2$

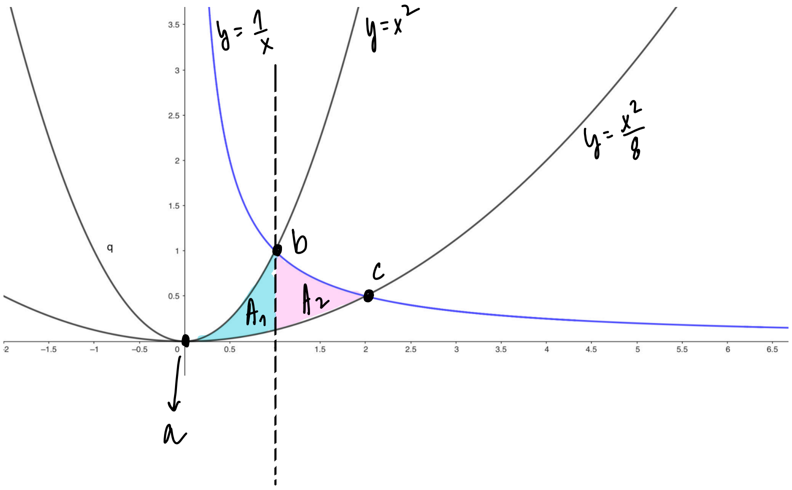
JUNIO 2021 A4

Sean las funciones: $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = x^2$; $h(x) = \frac{x^2}{8}$

Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las gráficas de esas tres funciones.

Calcular el área de dicho recinto.

Como siempre en este tipo de ejercicios la representación de las funciones es fundamental... Aunque no es lo que se valora, tienes que recordar como se dibuja cada una de ellas y que calculos puedes hacer para que su representación sea más sencilla.



para calcular los puntos que crean el área ...

$a \longrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{x^2}{8} \end{cases} \longrightarrow x^2 = \frac{x^2}{8}$

$8x^2 = x^2$

$7x^2 = 0$

$x = 0$

$b \longrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \longrightarrow x^2 = \frac{1}{x}$

$x^3 = 1$

$x = \sqrt[3]{1}$

$x = 1$

$c \longrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = \frac{x^2}{8} \end{cases} \longrightarrow \frac{1}{x} = \frac{x^2}{8} \longrightarrow 8 = x^3$

$\sqrt[3]{8} = x$

$2 = x$

$\underline{A_T = A_1 + A_2}$

$$A_1 = \int_0^1 x^2 - \frac{x^2}{8}\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{24}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right) u^2$$

$$A_2 = \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{x^2}{8}\,dx = \left.\ln|x| - \frac{x^3}{24}\right]_1^2 = \left[\left(\ln 2 - \frac{8}{24}\right) + \frac{1}{24}\right] u^2$$

$$A_t = \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{24}} + \ln 2 - \cancel{\frac{8}{24}} + \cancel{\frac{1}{24}} = \ln 2 \ u^2$$

SOLUCIÓN

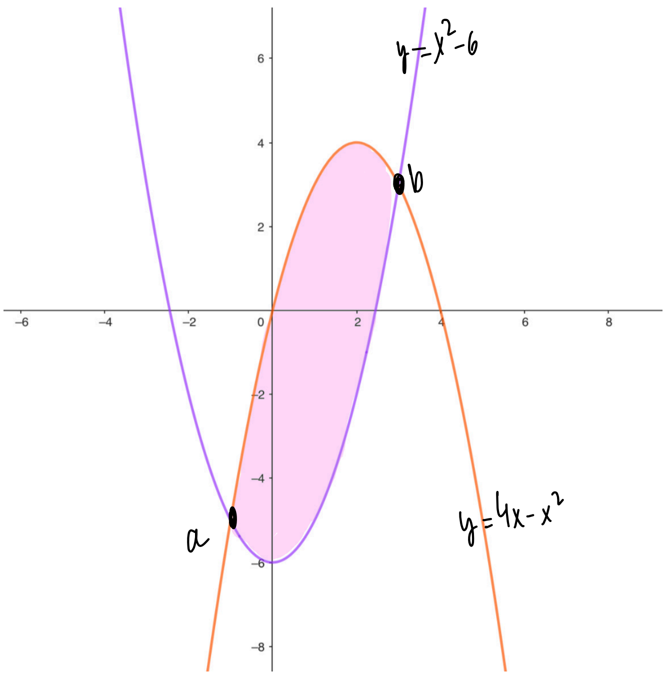
Los puntos de corte entre las funciones para saber dónde esta definida son: (0,0); (1,1) y $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

$\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{8}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x^2}{8}\right) dx = \ln 2 \ u^2$

JULIO 2021 A4
Dibujar el recinto limitado por las parábolas $y = 4x - x^2$ e $y = x^2 - 6$ y calcular su área.

Como siempre, lo primero debemos de representar las dos funciones, al ser funciones cuadráticas

- Máximos / mínimos
- Tabla de valores



Lo primero calcular los puntos entre los que está definida el área...

a y b $\longrightarrow \begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = x^2 - 6 \end{cases} \rightsquigarrow$ $4x - x^2 = x^2 - 6$

$-2x^2 + 4x + 6 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-3)}}{2}$

$x = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

Para terminar, como solo tenemos una función que haga de tapa de arriba y una que hace de tapa de abajo, solo tenemos que hacer una integral

$$\int_{-1}^{3} 4x - x^2 - (x^2 - 6)\, dx = \int_{-1}^{3} -2x^2 + 4x + 6\, dx = \left. \frac{-2x^3}{3} + 2x^2 + 6x \right]_{-1}^{3} = \left[\frac{-2 \cdot 27}{3} + 18 + 18 \right] - \left[\frac{2}{3} + 2 - 6 \right] u^2$$

$$= 18 - \frac{2}{3} + 4\ u^2 = 22 - \frac{2}{3}\ u^2$$

$$= \frac{64}{3}\ u^2$$

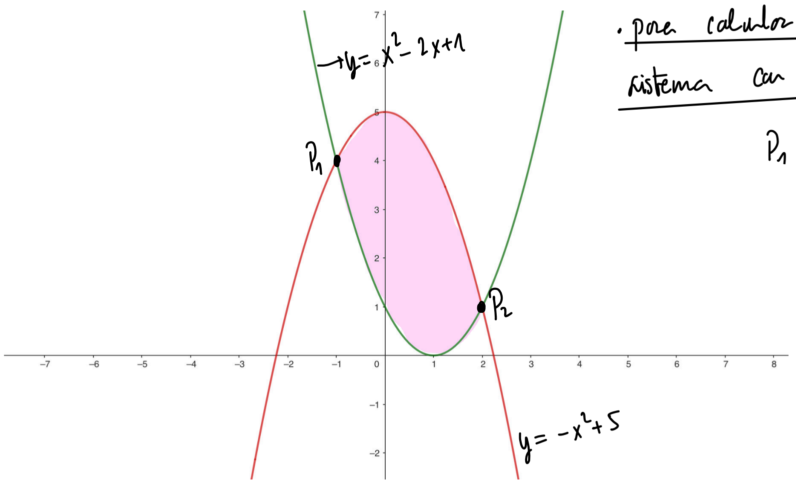
SOLUCIÓN
Los puntos donde se cortan las funciones $(-1, -5)$; $(3,3)$

$$\int_{-1}^{3} (4x - x^2 - x^2 + 6) dx = \frac{64}{3}\ u^2$$

JUNIO 2020 A4

Dibujar la región encerrada por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 5$, y calcular el área de dicha región.

Para representar las gráficas realizamos los calculos necesarios, desde una tabla de valores hasta maximos y mínimos etc...



· para calcular los puntos P_1 y P_2 es necesario hacer un sistema con las dos ecuaciones

$$P_1 \text{ y } P_2 \longrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -x^2 + 5 \end{cases} \longrightarrow x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 5$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(2)(-4)}}{4} \longrightarrow$$

$$x_1 = 2 \; ; \; x_2 = -1$$

$$\int_{-1}^{2} \text{Función Arriba} - \text{Función Abajo} \, dx =$$

$$\int_{-1}^{2} -x^2 + 5 - (x^2 - 2x + 1) \, dx = \int_{-1}^{2} -2x^2 + 2x + 4 \, dx = \left. \frac{-2x^3}{3} + x^2 + 4x \right]_{-1}^{2} = \left[-\frac{16}{3} + 4 + 8 \right] - \left[\frac{2}{3} + 1 - 4 \right] u^2 =$$

$$= 15 - \frac{16}{3} - \frac{2}{3} \, u^2 = \frac{45 - 18}{3} \, u^2 = \frac{27}{3} \, u^2 = 9 \, u^2$$

SOLUCIÓN

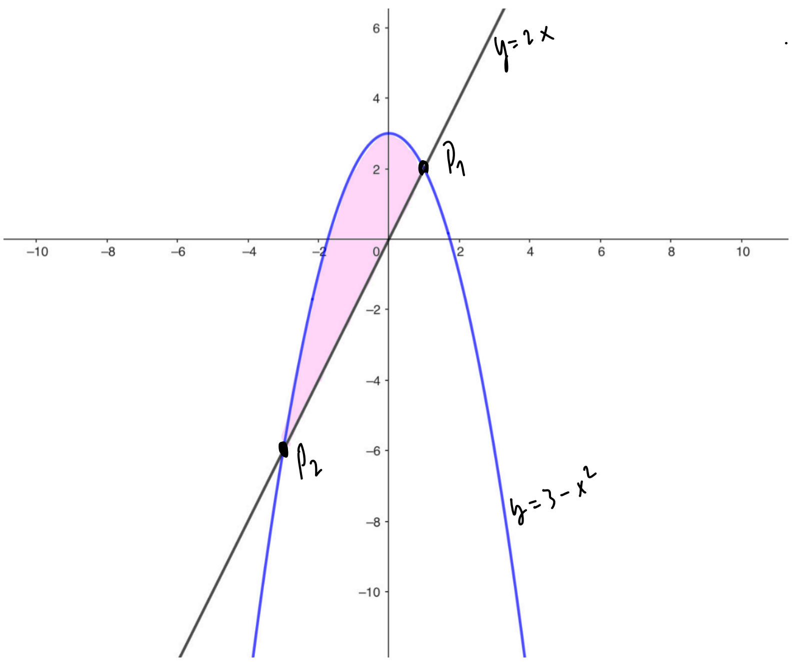
$$\int_{-1}^{2} [-x^2 + 5 - (x^2 - 2x + 1)] \, dx = 9u^2$$

JULIO 2020 A4

error $y = 2x$

Representa la región finita del plano limitada por la curva $y = 3 - x^2$ y por la recta $y = 2$. Calcular su área.

Representamos gráficamente las funciones utilizando el procedimiento que conocemos...



Para hallar los puntos P_1 y P_2 entre los que está definida el área...

$$\begin{cases} y = 3 - x^2 \\ y = 2x \end{cases} \longrightarrow 2x = 3 - x^2$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-3)}}{2}$$

$x_1 = 1$

$x_2 = -3$

$$\int_{-3}^{1} 3 - x^2 - (2x)\,dx = \left. 3x - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-3}^{1} = \left[3 - \frac{1}{3} - 1\right] - \left[-9 + 9 - 9\right] u^2 = 2 - \frac{1}{3} + 9\,u^2 = 11 - \frac{1}{3}\,u^2 = \frac{32}{3}\,u^2$$

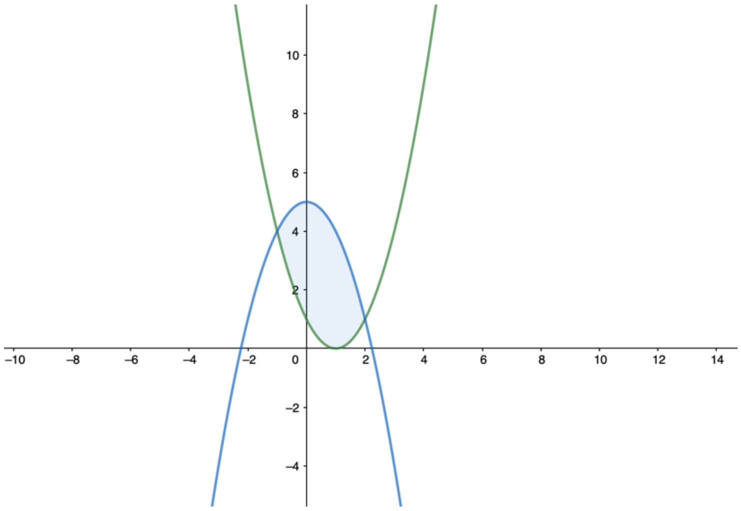
SOLUCIÓN

$\int_{-3}^{1} 3 - x^2 - 2x\ dx = \frac{32}{3}\ u^2$

JUNIO 2020 A4

Dibujar la región encerrada por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 5$, y calcular el área de dicha región.

Lo primero que debemos hacer es representar las dos funciones, al ser polinomios de segundo grado son muy sencillas de representar. Únicamente con calcular el máximo o mínimo de cada función y los puntos de corte con los ejes es más que suficiente.
La representación de estas funciones es la siguiente:



Cuando ya tienes la representación de las curvas y tienes determinado el área, debemos de calcular entre que valores habrá que realizar la integral, para eso debemos de igualar las dos funciones:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -x^2 + 5 \end{cases} \rightarrow x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 5 \rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

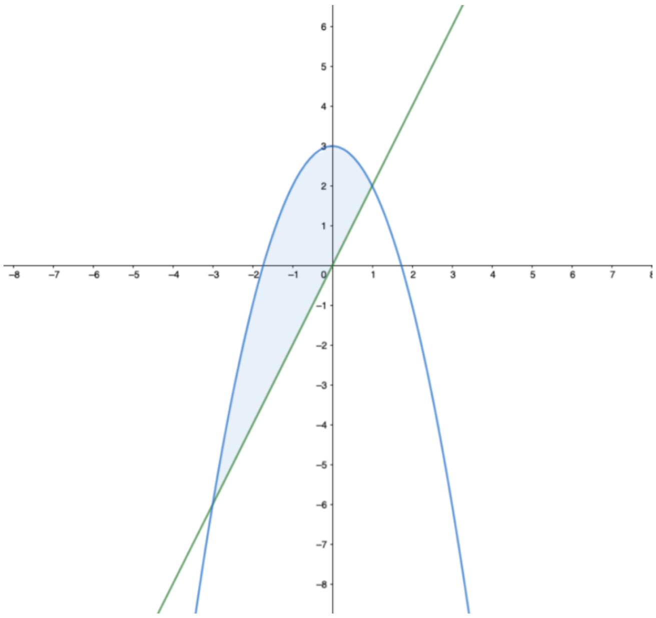
Recuerda que cuando vas a calcular un área que encierran dos funciones siempre es la integral de la función que va por encima menos la que va por debajo:

$$\int_{-1}^{2} (-x^2 + 5) - (x^2 - 2x + 1)\ dx = \int_{-1}^{2} -2x^2 + 2x + 4\, dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} =$$

$$\left[\frac{-2(8)}{3} + 4 + 8\right] - \left[\frac{-2(-1)}{3} + 1 - 4\right] = \frac{-16 + 12 + 24}{3} - \frac{+2 + 3 - 12}{3} = 9u^2$$

JULIO 2020 A4.- Representar la región finita del plano limitada por la curva $y = 3 - x^2$ y por la recta $y = 2x$. Calcular su área.

En este ejercicio lo primero que tenemos que hacer es representar las funciones que nos da el enunciado, por un lado, una función de primer grado que la representamos con una tabla de valores y la otra función, de segundo grado, que se representa calculando su máximo o mínimo y sus puntos de corte con los ejes.



Cuando ya tienes la representación y sabes cual es el área que debes de calcular, únicamente necesitas saber, entre que valores tenemos que calcular la integral, para eso hacemos un sistema con las dos funciones:

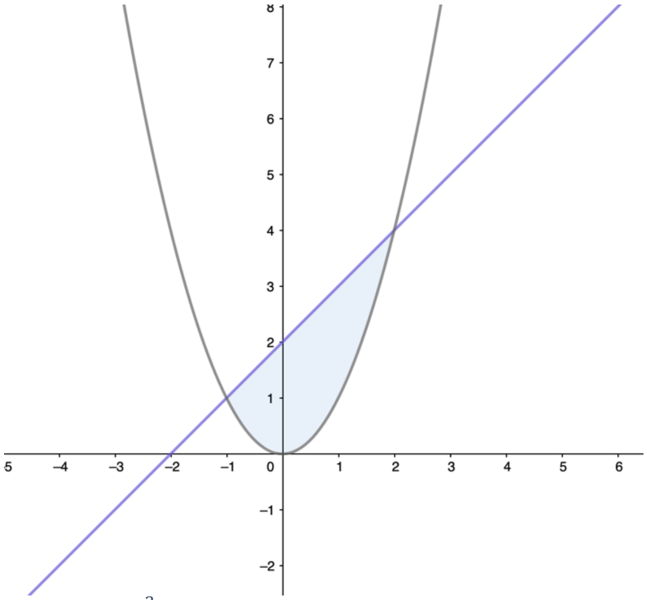
$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 3 - x^2 \end{cases} \rightarrow 2x = 3 - x^2 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\int_{-3}^{1} 3 - x^2 - 2x \, dx = \left[3x - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-3}^{1} = \left[3 - \frac{1}{3} - 1\right] - \left[-9 - \frac{-27}{3} - 9\right] = \frac{32}{3} \; u^2$$

JUNIO 2019 B4

Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y = x + 2$ y por la parábola $y = x^2$. Calcular su área.

Representamos las funciones; la ecuación de primer grado lo hacemos utilizando una tabla de valores, la ecuación de segundo grado, debemos de calcular su máximo o mínimo y por otro lado, los puntos de corte con los ejes:



$$\int_{-1}^{2} x + 2 - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \left[2 + 4 - \frac{8}{3}\right] - \left[\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right] = \frac{6 + 12 - 8}{3} - \frac{3 - 12 + 2}{6} = \frac{9}{2} \quad u^2$$

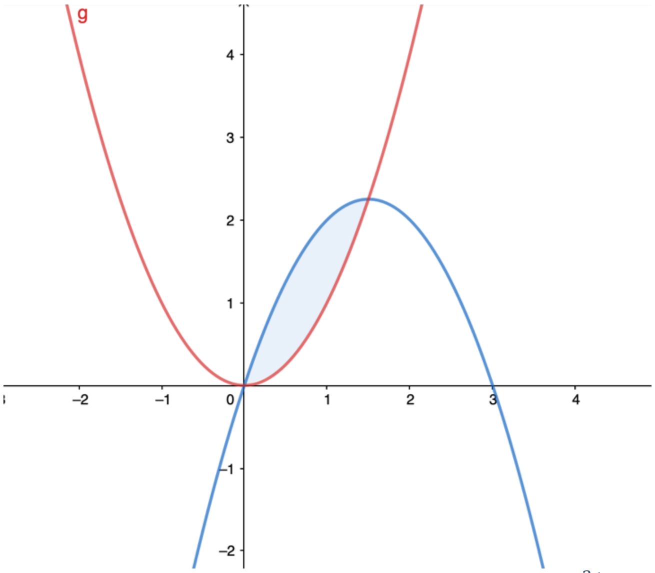
JULIO 2019 A4

Sea R el recinto del plano limitado por las curvas $y = x(3-x)$ y por $y = x^2$. Dibujar R y calcular su área.

Antes de empezar con el procedimiento, una de las funciones la desarrollamos un poco:

$$y = 3x - x^2$$

Ahora hacemos la representación de las dos funciones y calculamos el área del reciento que encierran:



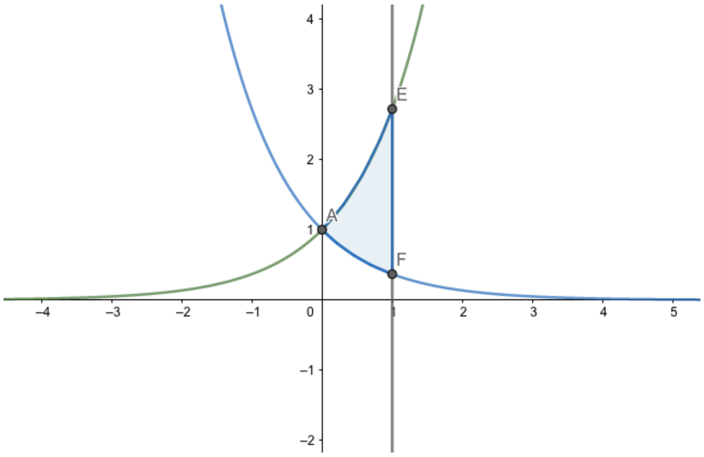
$$\int_0^{3/2} 3x - x^2 - x^2\,dx = \int_0^{3/2} 3x - 2x^2\,dx = \left[3\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3}\right]_0^{3/2}$$

$$\left[3\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} - 2\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3}\right] - [0] = \frac{9}{8}\,u^2$$

JUNIO 2018 A4

Representa el recinto del plano limitado por las curvas $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ y por la recta $x = 1$. Calcula su área.

Lo primero, para tener bien este ejercicio, tienes que dominar la representación de funciones:



Para el estudio de estas funciones si no sabes cómo son podrías calcular cómo se comportan en el infinito y en el menos infinito para poder representarlas aproximadamente.

Ahora ya hacer el cálculo del área es relativamente sencillo si dominas el asunto. Recuerda que la integral siempre se hace, tal y como lo tienes en los apuntes, la función de arriba menos la función de abajo. Y se resuelve por Barrow.

$$\int_0^1 e^x - e^{-x} dx = e^x + e^{-x}]_0^1 = F(1) - F(0) =$$

$$\frac{e^2+1}{e} - 2\, u^2$$

JULIO 2018 A4
La curva $y = 4x^2$ y la curva $y = 4x - x^2$ delimitan un recinto finito del plano. Dibujar dicho recinto y calcular su área.

Tienes dos funciones cuadráticas, recuerda que para dibujar estas funciones tienes que hacer un pequeño estudio previo. Donde tienes que calcular el vértice y los puntos de corte de las funciones con los ejes. Con esa información es más que suficiente para representar ambas funciones y ver el área que delimitan.

$$y = 4x^2 \to vertice \to V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{8} = 0 \to V_y = 4(0)^2 = 0 \to V(0,0)$$

Los puntos de corte de esta función con los ejes:

$$OX(y = 0) \to 0 = 4x^2 \to x = 0 \to (0,0)$$
$$OY(x = 0) \to y = 4(0)^2 = 0 \to (0,0)$$

Podrías hacer una tabla de valores para representar de forma más estricta la curva.

$$y = 4x - x^2 \to vertice \to V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2 \to V_y = 4(2) - (2)^2 = 4 \to V(2,4)$$

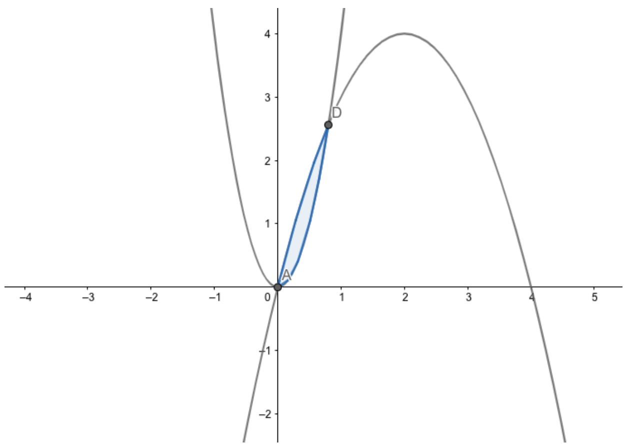
Los puntos de corte de esta función con los ejes:

$$OX(y = 0) \to 0 = 4x - x^2 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \to (0,0)\ y\ (4,0)$$
$$OY(x = 0) \to y = 4(0) - (0)^2 = 0 \to (0,0)$$

Podrías hacer una tabla de valores para representar de forma más estricta la curva.
Para hallar los puntos entre los que tienes que calcular el área, solo tienes que igualar las dos funciones con las que trabajas:

$$4x^2 = 4x - x^2 \to 5x^2 - 4x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

$$\int_0^{4/5} 4x - x^2 - 4x^2 dx =$$
$$= \int_0^{4/5} -5x^2 + 4x\, dx$$
$$= \frac{-5x^3}{3} + 2x^2 \Big]_0^{4/5} = \frac{32}{75} u^2$$



JULIO 2017 A4

Calcular el área del recinto limitado por las siguientes parábolas, realizando un dibujo de este. $y = -x^2 - 10x$; $y = (x+4)^2$

Lo primero que tienes que hacer es la representación de estas dos funciones con las que estás trabajando. Como son funciones cuadráticas, tendrás que calcular el vértice y los puntos de corte con los ejes como mínimo para poder tener una buena gráfica.

$$y = -x^2 - 10x \to vertice \to V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{10}{-2} = -5 \to V_y = -(.5)^2 - 10(-5) = 25 \to V(-5{,}25)$$

Los puntos de corte de esta función con los ejes:

$$OX(y=0) \to 0 = -x^2 - 10x \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -10 \end{cases} \to \begin{cases} (0{,}0) \\ (-10{,}0) \end{cases}$$

$$OY(x=0) \to y = -(0)^2 - 10(0) = 0 \to (0{,}0)$$

Podrías hacer una tabla de valores para representar de forma más estricta la curva.

$$y = (x+4)^2 \to y = x^2 + 8x + 16 \to vertice \to V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2} = -4 \to V_y = (-4+4)^2 = 0 \to V(-4{,}0)$$

Los puntos de corte de esta función con los ejes:

$$OX(y=0) \to 0 = (x+4)^2 \to \begin{cases} x = -4 \\ x = -4 \end{cases} \to (-4{,}0)$$

$$OY(x=0) \to y = (0+4)^2 = 16 \to (16{,}0)$$

Podrías hacer una tabla de valores para representar de forma más estricta la curva.
Cuando ya tienes las dos funciones representadas tienes que calcular los puntos de corte entre ellas para saber de dónde a donde ira tu área para el cálculo de la integral:
Para sacar los puntos de corte, iguala las funciones:

$$-x^2 - 10x = x^2 + 8x + 16 \to -2x^2 - 18x - 16 = 0 \to \begin{cases} x = -1 \\ x = -8 \end{cases}$$

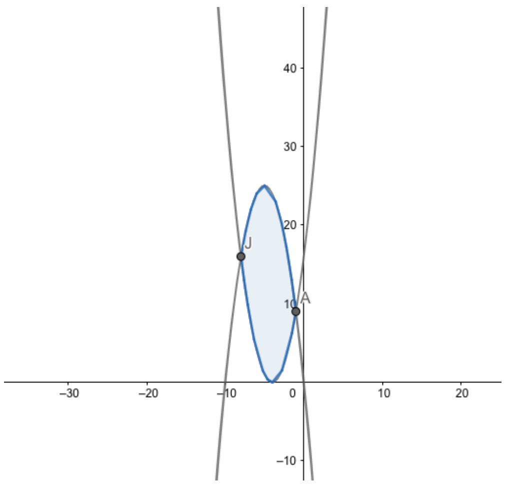
Ahora como siempre tienes que hacer la integral de la función que va por encima menos la función que va por debajo:

$$\int_{-8}^{-1} (-x^2 - 10x) - (x^2 + 8x + 16)\, dx =$$

$$\int_{-8}^{-1} -2x^2 - 18x - 16\, dx = \frac{-2x^3}{3} - 9x^2 - 16x \Big]_{-8}^{-1} =$$

$$\left(\frac{-2(-1)^3}{3} - 9(-1)^2 - 16(-1)\right) - \left(\frac{-2(-8)^3}{3} - 9(-8)^2 - 16(-8)\right)$$

$$= \frac{343}{3} u^2$$



JUNIO 2016 A4

Dibujar el recinto encerrado entre las gráficas de las funciones y calcular el área de dicho recinto.

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad ; \quad g(x) = -x + 3$$

Lo primero que tenemos que hacer es representar cada una de las ecuaciones por separado:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Máximo o mínimo: $f'(x) = 2x - 4 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 2$

$$f(2) = 4 - 8 + 3 \rightarrow f(2) = -1$$

Ahora calculamos los puntos de corte de la función;

$$Con\ el\ eje\ OX\ (y = 0) \rightarrow 0 = x^2 - 4x + 3 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

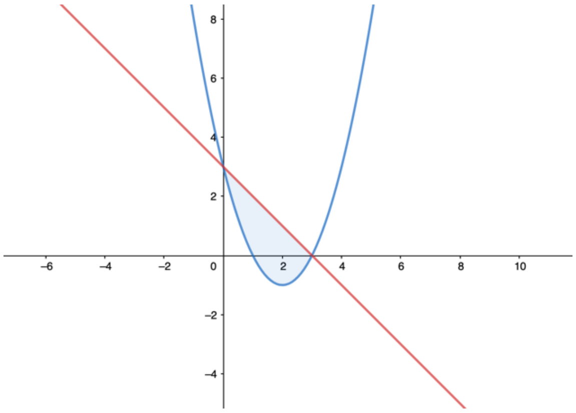
$$Con\ el\ eje\ OY\ (x = 0) \rightarrow y = 3$$

$$g(x) = -x + 3$$

Con una tabla de valores es suficiente;

x	y
1	2
3	0

Representación:



Para saber los puntos de corte entre los que debemos calcular la integral tenemos que hacer un sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = -x + 3 \end{cases} \rightarrow x^2 - 4x + 3 = -x + 3 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^3 -x + 3 - (x^2 - 4x + 3)\ dx = \int_0^3 -x^2 + 3x\ dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$\left[-\frac{27}{3} + 3\frac{9}{2}\right] - [0] = -9 + \frac{27}{2} = \frac{-18 + 27}{2} = \frac{9}{2}\ u^2$$

JULIO 2016 A4

Dadas las funciones $y = 9 - x^2$; $y = 2x + 1$

a) Dibuja el recinto acotado por sus gráficas.
b) Hallar el área de dicho recinto.

Lo primero que debemos de hacer es calcular la información necesaria para poder representar tanto la curva como la recta:

Para la curva $y = 9 - x^2$

Primero hacemos la derivada y la igualamos a cero para calcular el máximo o el mínimo de esta función (como el signo del monomio x^2 es negativo, esta función tendrá un máximo).

$$y' = -2x \rightarrow y' = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$
$$f(0) = 9 - 0^2 \rightarrow f(0) = 9$$

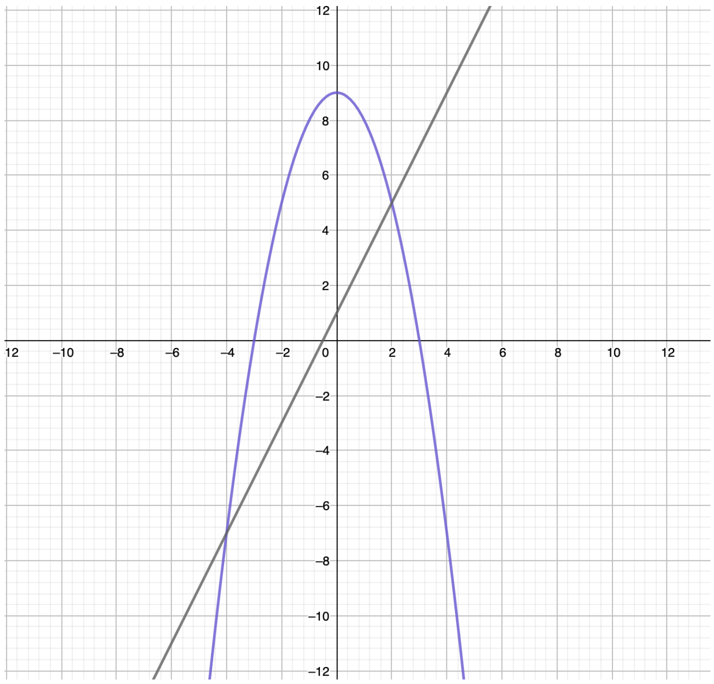
El vértice o el máximo, que es lo mismo, está en (0,9)

Calculamos los puntos de corte con los ejes con una tabla de valores:

x	y
0	$y = 9 - 0^2 = 9$
$0 = 9 - x^2 \rightarrow x = \begin{cases} -3 \\ +3 \end{cases}$	0

Con esta información ya es más que suficiente como para poder crear una representación, ahora vamos a por la recta, para representarla, únicamente debemos de crear una tabla de valores:

x	y
0	1
1	3



Para saber entre que valores está definida la integral:

$$\begin{cases} y = 9 - x^2 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \rightarrow 9 - x^2 = 2x + 1$$
$$-x^2 - 2x + 8 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -4 \\ 2 \end{cases}$$

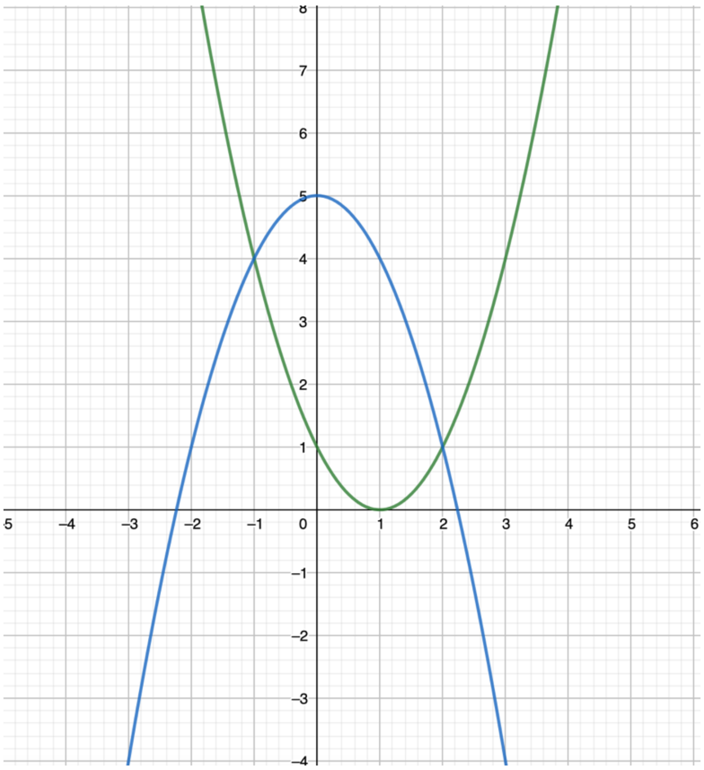
$$\int_{-4}^{2} 9 - x^2 - (2x + 1)\, dx$$
$$\left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x \right]_{-4}^{2} = 36u^2$$

JUNIO 2015 A4

Dibujar la región encerrada entre las parábolas $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y
$g(x) = -x^2 + 5$ y calcular el área de dicho recinto.

¡PRUEBA TU!
RECUERDA, PARA SABER ENTRE QUE VALORES ESTA DEFINIDA LA INTEGRAL:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -x^2 + 5 \end{cases}$$



LOS PUNTOS DE CORTE ENTRE ELLAS:

$$\boldsymbol{x = -1 \; y \; x = 2}$$

$$\int_{-1}^{2} -x^2 + 5 - (x^2 - 2x + 1)dx =$$

$$\boldsymbol{9u^2}$$

JULIO 2015 A4

Representar gráficamente la región del plano por la curva $y = 2x^3$, la recta tangente a la gráfica de dicha función en el origen de coordenadas y la recta $x = 1$. Calcular el área de dicha región.

Lo primero que tenemos que hacer es crear una tabla de valores para comprobar cómo se comporta la función $y = 2x^3$

x	y
-2	$y = 2(-2)^3 = -16$
2	$y = 2(2)^3 = 16$
-1	$y = 2(-1)^3 = -2$
1	$y = 2(1)^3 = 2$
0	$y = 2(0)^3 = 0$
-3	$y = 2(-3)^3 = -54$
3	$y = 2(3)^3 = 54$

El siguiente paso es calcular la recta tangente a la curva en el origen de coordenadas, por tanto,

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0)$$
$$f(0) = 0$$
$$f'(x) = 6x$$
$$f'(0) = 0$$

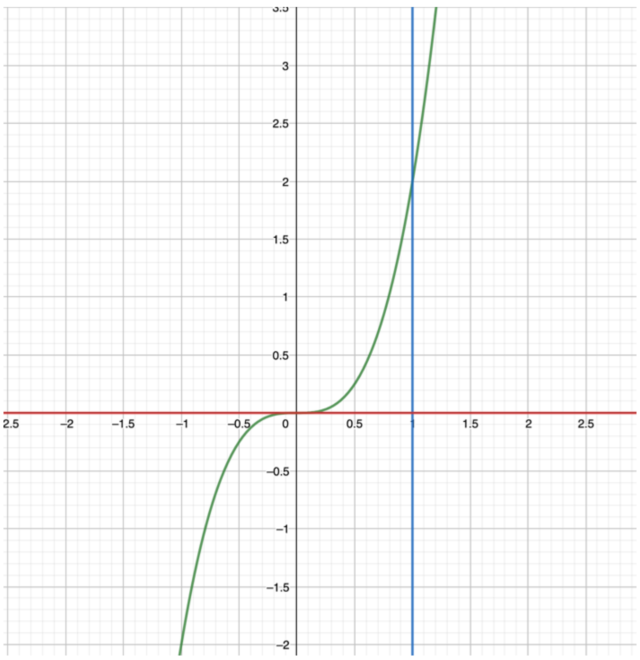
Por lo tanto,

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) \rightarrow y = 0$$

Lo único que debemos hacer ahora es representar toda la información sobre los ejes para determinar el área:

El área que debemos calcular, por tanto, estará definida desde $x = 0 \; hasta \; x = 1$

$$\int_0^1 2x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{2}\right]_0^1 =$$
$$\frac{1}{2}u^2$$



JUNIO 2014 A4

Se considera el recinto del plano limitado por la curva: $y = -x^2 + 2x$ y por la curva $y = x^2 - 10x$. Dibujar el recinto y calcular el área del recinto.

¡PRUEBA TU!

RECUERDA, PARA SABER ENTRE QUE VALORES ESTA DEFINIDA LA INTEGRAL:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = -x^2 - 10x \end{cases}$$

$$\int_0^6 \left(-x^2 + 2x\right) - \left(x^2 - 10x\right) dx = 72u^2$$

SI NECESITAS MAS AYUDA CON ESTE EJERCICIO NO DUDES, PONTE EN CONTACTO CONMIGO

WHATSAPP: 688-820-933

JULIO 2014 A4

Dibujar el recinto encerrado entre la gráfica de la función: $y = x^2 - 6x$, y la de la función: $y = 3x$ y calcular su área.

¡PRUEBA TU!

RECUERDA, PARA SABER ENTRE QUE VALORES ESTA DEFINIDA LA INTEGRAL:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x \\ y = 3x \end{cases}$$

$$\int_0^6 3x - x^2 + 6x\, dx = \frac{243}{2}\, u^2$$

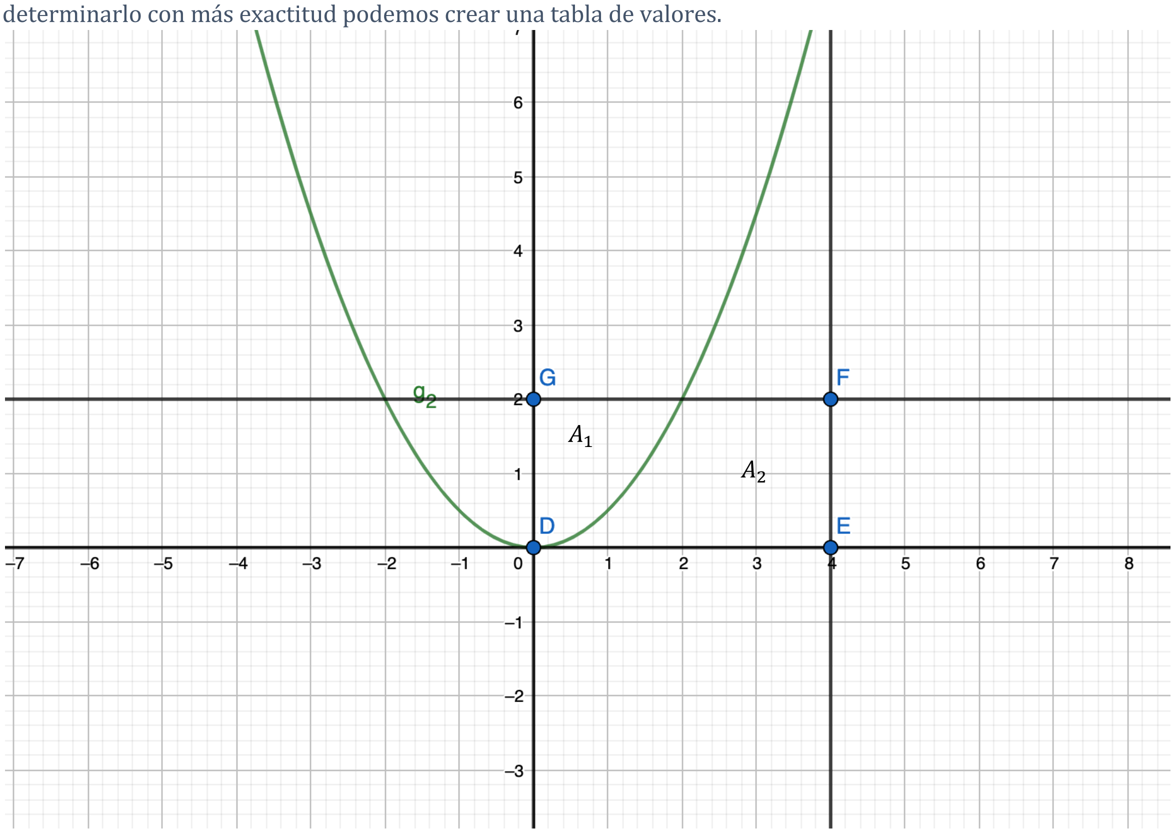
SI NECESITAS MAS AYUDA CON ESTE EJERCICIO NO DUDES, PONTE EN CONTACTO CONMIGO

WHATSAPP: 688-820-933

JUNIO 2013 A4

La parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide el rectángulo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,2) y$ $(0,2)$ en dos recintos. Calcular el área de cada uno de los recintos.

Lo primero que haremos será representar la función y los puntos sobre los ejes para observar el área que deberemos de calcular. Recuerda que se trata de una función de segundo grado que sabemos cómo se comporta. Tener un factor multiplicando lo único que hace es acercar o alejar las ramas del eje OY. Para determinarlo con más exactitud podemos crear una tabla de valores.



Como puedes comprobar tendremos dos recintos, por un lado, el recinto definido desde $x = 0$, hasta $x = 2$ donde iria por encima la recta horizontal $y = 2$ y por debajo la curva.
Po otro lado el recinto que va de $x = 0$ hasta $x = 4$. Observa que este segundo recinto habrá que dividirlo en dos integrales ya que tenemos primero una función por encima y después otra.
Es decir,

$$A_1 = \int_0^2 2 - \frac{1}{2}x^2 dx = \left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{6} = \frac{8}{3}u^2$$

$$A_2 = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 - 0 \; dx \; + \int_2^4 2 - 0 \; dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 + [2x]_0^2 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}u^2$$

Observa que estas calculando el área de un cuadrado de lado 2.

JULIO 2013 A4

Dadas las tres funciones: $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 9x\ ;\ h(x) = 25x$

a) Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las tres gráficas.
b) Calcular el área de dicho recinto.

Representamos cada una de las funciones después de hacer una tabla de valores con cada una de ellas:

$$y = \frac{1}{x}$$

Recuerda que esta función tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y otra asíntota horizontal en $y = 0$

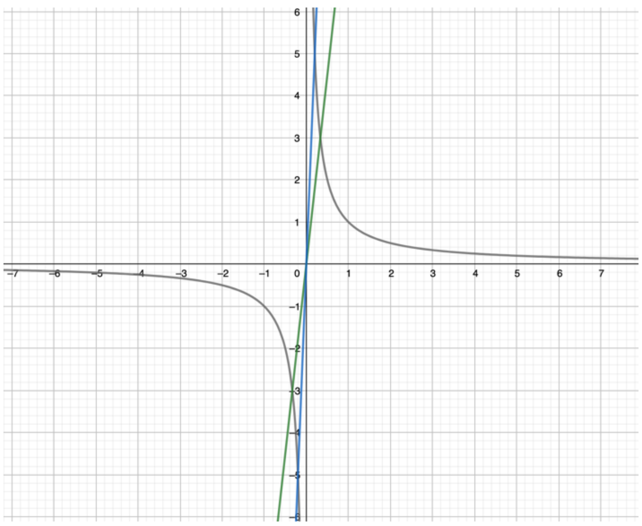
x	y
-1	-1
1	1
2	$0{,}5$
-2	$-0{,}5$
$0{,}5$	2
$-0{,}5$	-2

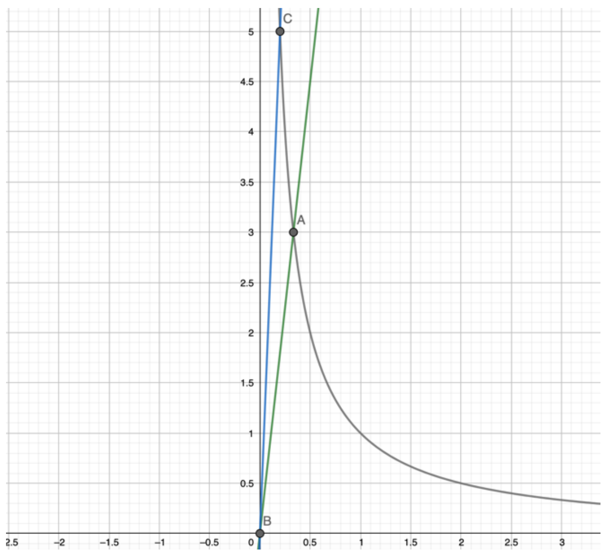
$y = 9x$

x	y
1	**9**
0	**0**

$y = 25x$

x	y
1	**25**
0	**0**





Observa la existencia de dos áreas que son iguales, por tanto, realizando el cálculo de una de ellas y duplicando el resultado, obtendremos el valor del área que queremos determinar.
Ahora fíjate que el área que encierran las tres funciones la tenemos que dividir en el cálculo de dos integrales ya que por debajo de dicho recinto tenemos una única función, pero por encima del recinto tenemos dos funciones.
Para calcular los puntos entre los que estarán definidas las integrales debemos de realizar los sistemas entre las funciones dos a dos:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = 25x \end{cases} \to \frac{1}{x} = 25x \to 1 = 25x^2 \to x = \pm\frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} y = 25x \\ y = 9x \end{cases} \to 25x = 9x \to x = 0$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = 9x \end{cases} \to \frac{1}{x} = 9x \to 1 = 9x^2 \to x = \pm\frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\frac{1}{5}} 25x - 9x\ dx + \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x} - 9x\ dx = [8x^2]_0^{1/5} + \left[\ln x - \frac{9x^2}{2}\right]_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}} =$$

$$\frac{8}{25} + \ln\frac{5}{3} + \frac{9}{50} - \frac{1}{2} = \ln\frac{5}{3}\ \ u^2$$

JUNIO 2012 A4

Dadas las curvas $y = x^4$ e $y = x^2$

a) Dibujar el recinto finito limitado por las gráficas de las dos curvas.

b) Calcular el área di dicho recinto.

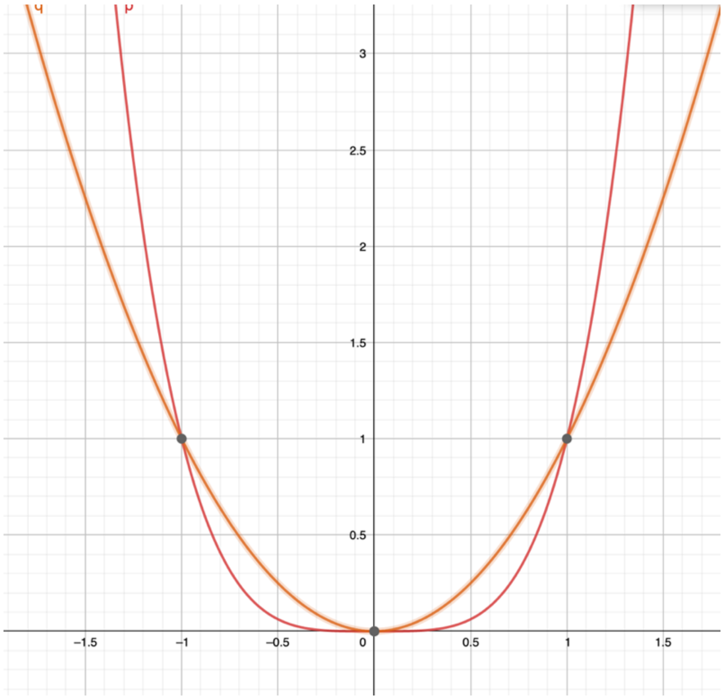
Lo primero es entender cómo se comportan las funciones y a partir de eso debemos de crear una tabla de valores con cada una de ellas:

$y = x^2$

x	y
1	1
0	0
−1	1
−2	4
2	4
3	9
−3	9

$y = x^4$

x	y
1	1
0	0
−1	1
−2	16
2	16
3	81
−3	81



Tenemos dos recintos iguales. Para saber de dónde hasta donde están definidos, tenemos que hacer un sistema con las dos funciones:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^4 \end{cases} \rightarrow x^2 = x^4$$

$$x^2 - x^4 = 0 \rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Calculando uno de los recintos y duplicando la solución, tendremos la solución del ejercicio:

$$\int_0^1 x^2 - x^4 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5} u^2 \rightarrow \frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{4}{5} u^2$$

JULIO 2012 A4

Dadas las tres funciones : $f(x) = x$; $g(x) = x^2$; $h(x) = \frac{x^2}{4}$

a) Dibujar el recinto finito limitado por las curvas de las tres funciones.
b) Calcular el área de dicho recinto.

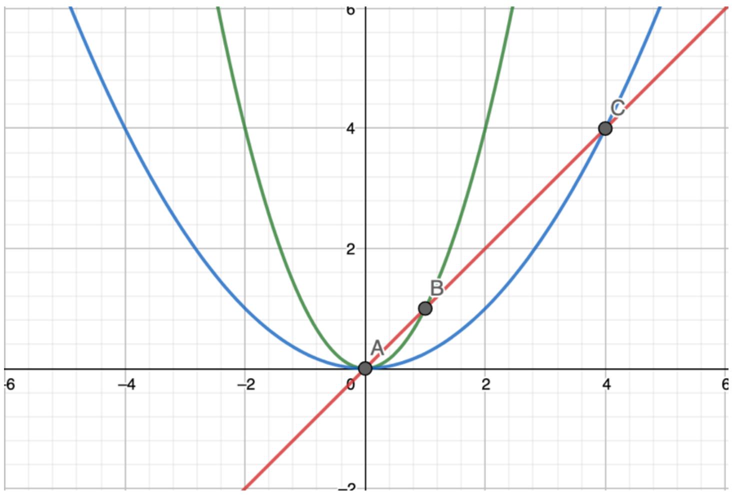
Para dibujar la función $f(x) = x$ hacemos una tabla de valores simplemente:

x	y
1	**1**
0	**0**
−1	**−1**
−2	**−2**

Para representar las otras dos funciones $g(x) = x^2$; $h(x) = \frac{x^2}{4}$ → el vértice con la derivada y una tabla de valores para hacer la representación más exacta.

x	y		x	y
1	**1**		**1**	0,25
0	**0**		**0**	**0**
−1	**1**		**−1**	0,25
−2	**4**		**−2**	1

Ahora tenemos que calcular los puntos de corte entre las diferentes funciones para saber entre que valores estará definida cada integral que debemos de hacer. En este caso, tenemos que determinar dos áreas, puesto que, por debajo siempre está definida la misma curva, pero por encima hacemos un cambio de función y, por tanto, haremos dos áreas.



$$Punto\ A \rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow x^2 = x \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$Punto\ B \rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = \frac{x^2}{4} \end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{4} = x \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

La primera área será desde cero hasta uno, dentro del cálculo de esta área forman parte la función verde (arriba) y la azul (abajo), por tanto:

$$A_1 = \int_0^1 x^2 - \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{12}\Big]_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{4}u^2$$

La segunda área está comprendida entre 1 y 4, formando parte de esta área la función roja (arriba) y la función azul (abajo), por tanto:

$$A_2 = \int_1^4 x - \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\Big]_1^4 = F(4) - F(1) = \left(8 - \frac{16}{3}\right) - \left(\frac{5}{12}\right) = \frac{9}{4}\,u^2$$

Finalmente, el área total será la suma de estas dos áreas por separado, es decir,

$$A_t = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}u^2$$

JUNIO 2011 A4

Sean las siguientes funciones $f(x) = x^2 + 3x + 2 \quad g(x) = -x^2 - 3x + 10$

a) Trazar un esquema gráfico de ambas funciones.
b) Calcular el área de la región del plano limitada por ambas funciones.

¡PRUEBA TU!
CON TODA LA INFORMACIÓN, DE EJERCICIOS ANTERIORES, DEBES DE SER CAPAZ DE HACERLO TU SOLA.

JUNIO 2011 B4

Trazar un esquema gráfico del recinto del plano limitado por $y = 9 - x^2$ y por $y = -x - 3$. Hallar el área del recinto del apartado anterior.

Lo primero que debemos de hacer es crear la representación de la curva y de la recta.
La curva la representamos calculando el vértice, es decir, el máximo o el mínimo. También debemos de calcular los puntos de corte con los ejes. Y una pequeña tabla de valores.

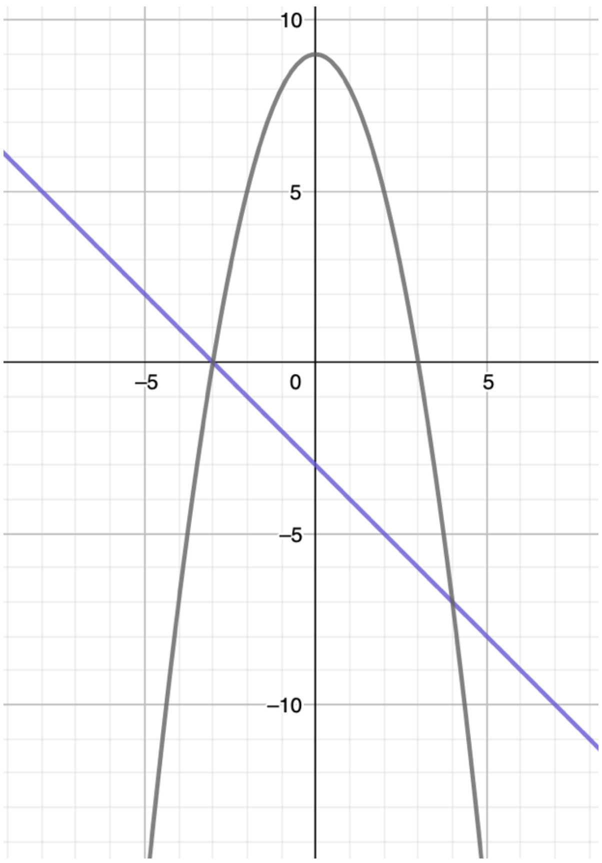
$$y = 9 - x^2 \rightarrow y' = -2x$$
$$y' = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Ahora hacemos la tabla con el resto de la información que necesitamos:

x	y
0	**9**
3	**0**
$-$**3**	**0**

Para la representación de la recta, con una tabla de valores es más que suficiente:

x	y
0	$-$**3**
3	$-$**6**
$-$**3**	**0**



Para saber entre que valores tenemos que calcular la integral, debemos de resolver un sistema con las ecuaciones de cada una de las funciones:

$$\begin{cases} y = -x - 3 \\ y = 9 - x^2 \end{cases} \rightarrow -x - 3 = 9 - x^2$$
$$x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -3 \\ 4 \end{cases}$$

Por tanto,

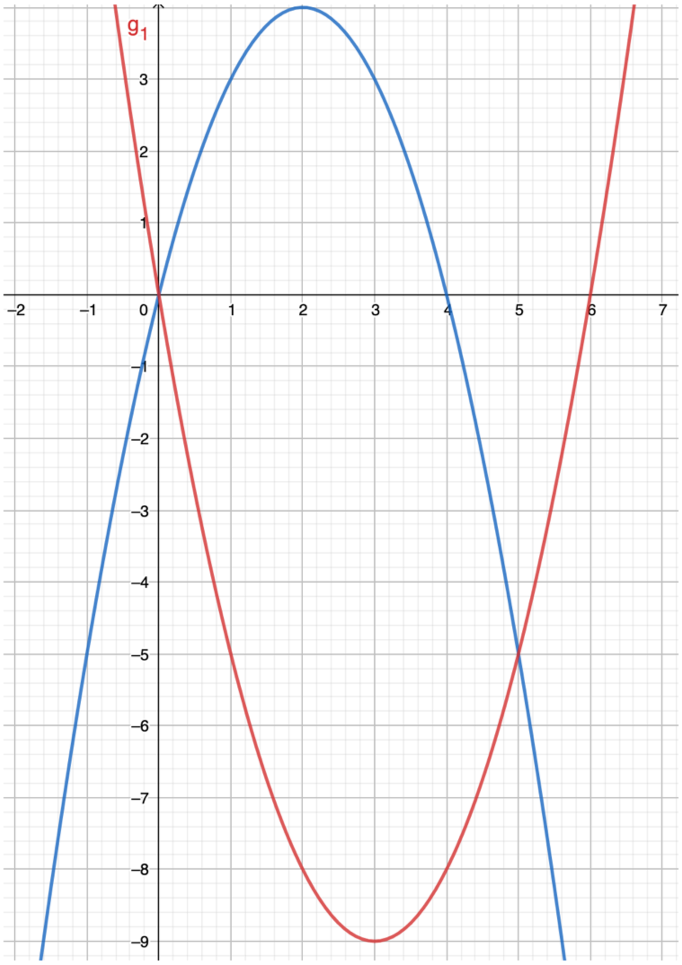
$$\int_{-3}^{4} 9 - x^2 - (-x - 3)dx =$$
$$-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x\Big]_{-3}^{4} = F(4) - F(-3) =$$
$$\frac{343}{6}\,u^2$$

JUNIO 2010 A4

Sean $f(x) = x(4-x)$ y $g(x) = x(x-6)$

Trazar un esquema gráfico del recinto que limitan y calcular su área mediante calculo integral.
Para realizar este ejercicio primero debes de representar las funciones de forma correcta sobre los ejes de coordenadas. Recuerda que, para representar una ecuación de segundo grado, solo es necesario que calcules el máximo o mínimo de cada función (vértice) y realizar una tabla de valores con cada una de las ecuaciones.
Para saber entre que valores está definida la función tenemos que igualar las funciones y realizar un sistema (igualación):

$$\begin{cases} y = x(4-x) \\ y = x(x-6) \end{cases} \rightarrow x = 0\,;x = 5$$



$$\int_0^5 4x - x^2 - (x^2 - 6x)dx =$$

$$\int_0^5 -x^2 + 10x\, dx$$

$$-\frac{x^3}{3} + 5x^2\Big]_0^5 =$$

$$-\frac{125}{3} + 125 = \frac{250}{3}\, u^2$$

JULIO 2010 A4
La recta tangente en el punto (4,0) a la función $f(x) = x(4-x)$, la gráfica de la función y el eje OY limitan un recinto del plano en el primer cuadrante.
Trazar un esquema gráfico de dicho recinto y calcular su área mediante calculo integral.

Lo primero que debemos de hacer es calcular la recta tangente para tener su expresión analítica.

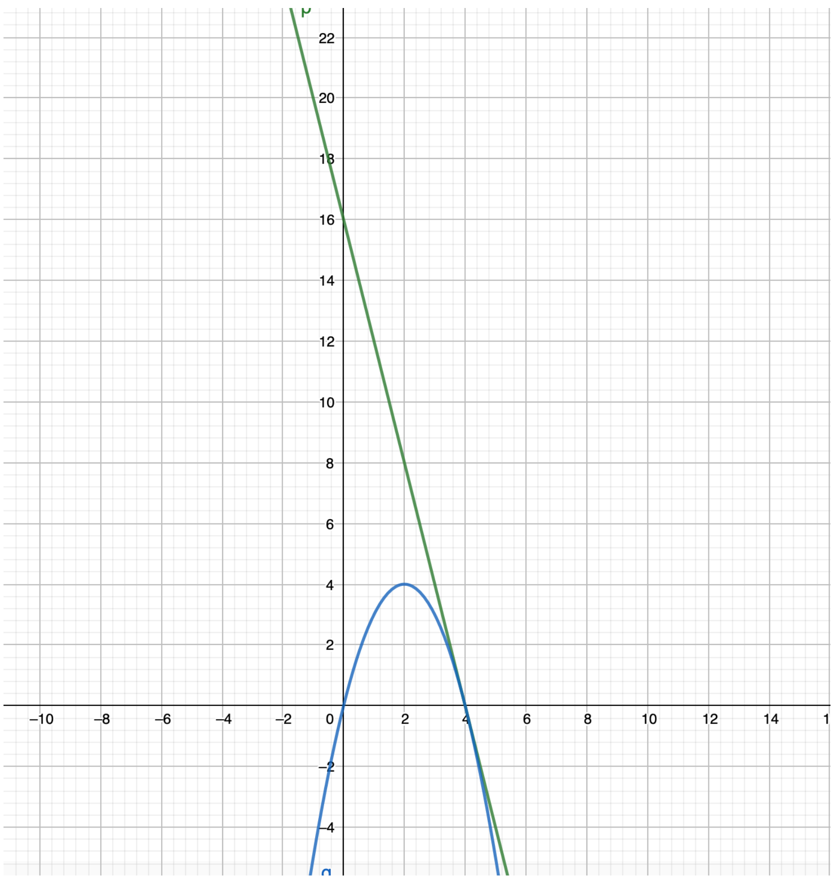
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$f(4) = 4(4-4) = 0$$
$$f'(x) = 4 - 2x$$
$$f'(4) = -4$$

Sustituimos toda esta información en la función (amarillo) y obtendremos la expresión de la recta tangente a la función en el punto (0,4)

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \to y - 0 = -4(x-4) \to y = -4x + 16$$

Ahora con la recta tangente, el eje OY y la función tenemos que crear el área del cual después con las integrales haremos el cálculo.
Para representar la recta tangente, con una tabla de valores será suficiente.
Para representar la función, haremos el cálculo de su vértice, o lo que es lo mismo, el cálculo de su máximo o mínimo. Y una pequeña tabla de valores con los puntos de corte con los ejes, es decir, punto de corte con el eje;
$OX\ (y = 0); OY(x = 0)$

Como podemos comprobar la integral estará definida entre el cero y el cuatro.
Por tanto,



$$\int_0^4 -4x + 16 - [x(4-x)]dx = \int_0^4 x^2 - 8x + 16\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x\right]_0^4 =$$
$$\left(\frac{4^3}{3} - 4(4)^2 + 16(4)\right) - (0) = \frac{64}{3}\ u^2$$