JULIO 2022 B1

Sena las matrices $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&x\\x&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

Encuentra el valor o valores de x para que se cumpla la igualdad:

$$B^2=A$$

Igualmente, para que se cumpla:

$$B+C=A^{-1}$$

Determina el valor de x para que $A+B+C=3\cdot I_2$, donde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$B^2=A$

$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}1&x\\x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\x&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x^2&x\\x&x^2\end{pmatrix}$

$B^2=A \longrightarrow \begin{pmatrix}1+x^2&x\\x&x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix} \longrightarrow$

$x^2=1 \longrightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$

$1+x^2=2 \longrightarrow x=\pm 1$

$x=1$

Como el valor que se repite siempre es $x=1$ esta es la solución.

$B+C=A^{-1}$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot(A_{adj})^t \longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=2-1=1$

$A_{adj}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix} \longrightarrow (A_{adj})^t=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

$B+C=\begin{pmatrix}1&x\\x&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x-1\\x-1&2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&x-1\\x-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

$x-1=-1$

$x=0$

esta es la solución para que se cumpla la ecuación

$A+B+C=3I_2$

$\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&x\\x&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\-1&2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3&x\\x&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix} \longrightarrow x=0$

Solución para que la ecuación funcione.

JUNIO 2021 A1

(*) Reponer documento

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Obtener los valores de los parámetros m y n para que la matriz A coincida con su traspuesta, y no tenga inversa.

Para $m = 0$ y $n = 3$, obtener, si se puede, la matriz inversa.

Para $m = 0$ y $n = 3$, resolver la siguiente ecuación matricial:

$$X \cdot A + 2I_3 = A^2 \quad (*)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^t = A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} m = -1 \\ n = n \end{matrix}$$

Ahora tenemos que calcular el det(A) para igualarlo a cero ya que una matriz no tiene inversa cuando su determinante es cero...

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2n - 1 + m - n + 2m - 1 \longrightarrow 3m + n - 2 \xrightarrow{m=-1} -3 + n - 2 = 0$$

$$n = 5$$

Para $m = 0$ y $n = 3 \longrightarrow$ ¿A^{-1}?

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{adj})^t \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 - 3 - 1 = 1$$

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow (A_{adj})^t = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot A + 2 \cdot I_3 = A^2$$

$$X \cdot A = A^2 - 2 \cdot I_3$$

$$X = \left[A^2 - 2I_3\right] \cdot A^{-1}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow X = \begin{pmatrix} -9 & -7 & 9 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

JULIO 2021 B1

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Resolver la ecuación matricial:

$$X \cdot A = 2B^t + I_2$$

→ Tenemos dos procedimientos para comprobar si la siguiente igualdad se cumple...

- Para que se verifique $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ se tiene que cumplir que $A \cdot B = B \cdot A$

Primera forma de verificarlo

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Segunda forma

$$(A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2AB = 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$$

Para resolver la siguiente ecuación; $X \cdot A = 2B^t + I_2$

$$X = \left[2B^t + I_2\right] \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{adj})^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^t \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$X = \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \longrightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \longrightarrow X = \begin{pmatrix} -5 & -\frac{10}{7} \\ -2 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

JUNIO 2020 A1

Se considera la ecuación matricial

$$A \cdot X = A^t \cdot B \quad donde \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

¿Qué dimensión debe tener la matriz X?

Resuelve la ecuación matricial

$$A \cdot X = A^t \cdot B \longrightarrow X = A^{-1}\left[A^t \cdot B\right]$$

$$3x3 \cdot \left[3x3 \;\; 3x1\right]$$

$$3x3 \cdot 3x1$$

$$3x1$$ dimensión que tiene X

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{adj})^t \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0+4+0+1+0-4 = 1$$

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow (A_{adj})^t = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \longrightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -29 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$

JULIO 2020 B1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Calcula la inversa de la matriz $(A \cdot A^t)$

¿Admite inversa la matriz $(A^t \cdot A)$

Calcula, cuando sea posible:

$$A \cdot B \quad y \quad A^t \cdot B$$

→ Calcular la inversa $(A \cdot A^t)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^t)^{-1} = \frac{1}{|A \cdot A^t|} \cdot \left[(A \cdot A^t)_{adj}\right]^t \longrightarrow (A \cdot A^t)^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot A^t| = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{vmatrix} = 70 - 64 = 6$$

$$(A \cdot A^t)_{adj} = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & +5 \end{pmatrix} \longrightarrow \left[(A \cdot A^t)_{adj}\right]^t = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

Admite inversa $A^t \cdot A$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

Para que una matriz tenga inversa, su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$|A^t \cdot A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix} = 65 + 48 + 48 - 45 - 52 - 64 = 0$$

no tiene inversa la matriz $A^t \cdot A$

$$A \cdot B \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2×3 $\quad$ 2×2

no coinciden estos valores, por tanto no podemos hacer la multiplicación.

$$A^t \cdot B \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

3×2 $\quad$ 2×2 $\quad$ 3×2

JUNIO 2019

Sena las matrices $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}10&11\\4&7\end{pmatrix}$

a) Determina la matriz inversa de la matriz $I+B$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

b) Calcula las matrices X e Y que verifican que:

$$\begin{cases}AX+BY=C\\ AX=Y\end{cases}$$

Lo primero que tienes que hacer es calcular la matriz $I+B$

$$I+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$$

Ahora tienes que hacer la inversa de esa matriz, puedes elegir el procedimiento que te de la gana, yo voy a aplicar la definicion de inversa:

$$(I+B)^{-1}(I+B)=I$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2a+b&3b\\2c+d&3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Ahora con lo que te acabo de subrayar (Azul y Verde) vas hacer un sistema de ecuaciones para despejar los parametros:

$$\begin{cases}2a+b=1\\ 3b=0\end{cases}\to b=0\to a=\frac{1}{2}$$

Ahora con los otros colores (Rojo y Amarillo) haces otro sistema para sacar el resto de parametros:

$$\begin{cases}2c+d=0\\ 3d=1\end{cases}\to d=\frac{1}{3}\to c=\frac{-1}{6}$$

Entonces;

$$(I+B)^{-1}=\boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\ \frac{-1}{6}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}}$$

Ahora para el siguiente apartado, tienes que resolver un sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases}AX+BY=C\\ AX=Y\end{cases}\to \textit{ahora observa y aplica el metodo de sustitución:}$$

$$AX+BY=C\to\quad Y+BY=C\to\quad (I+B)Y=C\to\quad Y=(I+B)^{-1}C$$

$$Y=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\ \frac{-1}{6}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&11\\4&7\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}5&\frac{11}{2}\\ \frac{-1}{3}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$$

Ahora lo siguiente que tienes que hacer para terminar es calcular el valor de la incognita X;

$$AX=Y\to\quad A^{-1}AX=A^{-1}Y\to\quad X=A^{-1}Y$$

¡Cuidado! Ahora tienes que calcular la inversa de la matriz A, usa el procedimiento que quieras;

$$A^{-1}A=I\to\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2x&y\\2z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\to\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}Y\to X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&\frac{11}{2}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&\frac{11}{4}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$$

(JULIO 2019)

Sean A y B las siguientes matrices; $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar la matriz inversa de $A - B$

b) Hallar la matriz X tal que $X(A - B) = 2A - 3B$

Lo primero que tienes que hacer es calcular la matriz A menos la matriz B:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa puedes hacerlo siguiendo el procedimiento que mas te interese o el que mejor sepas hacer, en este caso voy a utilizar la definición de inversa:

$$(A - B)^{-1}(A - B) = I \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a + b & a + b \\ 2c + d & c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Ahora con lo que te acabo de subrayar (Azul y Verde) vas hacer un sistema de ecuaciones para despejar los parametros:

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \rightarrow Ahora\ por\ reducción \rightarrow a = 1 \rightarrow b = -1$$

Ahora con los otros colores (Morado y Amarillo) haces otro sistema para sacar el resto de parametros:

$$\begin{cases} 2c + d = 0 \\ c + d = 1 \end{cases} \rightarrow Reducción\ para\ resolverlo \rightarrow c = -1 \rightarrow d = 2$$

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora tienes que resolver la siguiente ecuacion matricial;

$$X(A - B) = 2A - 3B$$
$$X(A - B)(A - B)^{-1} = (2A - 3B)(A - B)^{-1}$$
$$X = (2A - 3B)(A - B)^{-1}$$

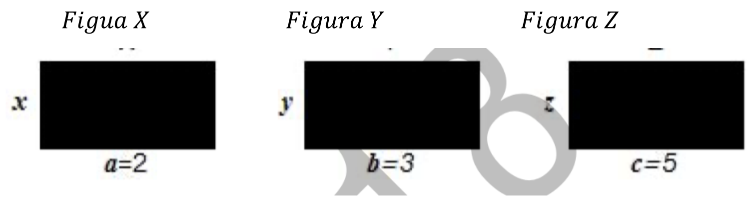
$$X = \left[2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(JUNIO 2018)

a) Dadas las matrices $R = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$, determina el valor de las componentes $x > 0$ e y para que se verifique $R^2 = S$, donde $R^2 = R \cdot R$.

b) Se conoce la longitud, $a = 2,\ b = 3\ y\ c = 5,$ de un lado de cada rectangulo de la figuraX, Y, Z y la otra no x, y, z. Determinar x, y, z para que se cumpla:

   a. La suma del area de los tres rectangulos vale 64.
   b. La suma de los perimetros de los rectagunlos X e Y vale 34
   c. La suma del perimetro de X mas dos veces el area de Y vale 48.



Lo primero que tienes que hacer en este ejercicio que a simple vista puede asustar, es leerlo detenidamente y empezar por el principio, paso por paso.
Lo primero que quiere que calcules es los valores de los parámetros, x e y para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$R^2 = S \rightarrow R \cdot R = S \rightarrow \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^2+3x-3 & 3x+9y \\ -x+x^2-3y+3xy & -3+3x+9y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x^2+3x-3=1 \\ 3x+9y=-15 \\ -x+x^2-3y+3xy=0 \\ 9y^2+3x-3=36 \end{cases} \rightarrow Resolviendo\ la\ primera\ ecuación \rightarrow x = 1\ \ y\, x = -4$$

$$pero\ como\ el\ enunciado\ dice\ que\ la\ x\ tiene\ que\ ser\ mayor\ que\ cero, la\ unica\ solución\ es$$
$$x = 1$$

Ahora sabiendo el valor del parámetro x tienes que calcular el valor de y;

$$3x+9y=-15 \rightarrow y = \frac{-15-3x}{9} \rightarrow y = \frac{-15-3}{9} \rightarrow y = -2$$

Ahora viene lo que quizás te dé un poco de miedo, resolver la segunda parte del ejercicio:
Este ejercicio para llegar a la solución correcta solo requiere de paciencia.
La suma del area de los tres rectangulos vale 64 $\rightarrow 2x+3y+5z=64$
La suma de los perimetros de los rectagunlos X e Y vale 34 $\rightarrow 4+2x+6+2y=34 \rightarrow 2x+2y=24$
La suma del perimetro de X mas dos veces el area de Y vale 48 $\rightarrow 4+2x+6y=48 \rightarrow 2x+6y=44$

Ahora si quieres puedes utilizar el método de reducción con las dos últimas ecuaciones y sacar los parámetros x e y:

$$2x+2y=24$$
$$2x+6y=44$$
$$-4y=-20 \rightarrow y=5$$

Sabiendo que $y = 5 \rightarrow 2x+2y=24 \rightarrow 2x = 24-10 \rightarrow x = 7$
Por último, para sacar el valor de z, tienes que ir a la primera ecuación y sustituir:

$$2x+3y+5z=64 \rightarrow 2(7)+3(5)+5z=64 \rightarrow z=7$$

(JULIO 2018)

a) Calcula los paremtros a, b, c, d para que se cumpla la igualdad $F \cdot G = H \cdot K$ con las siguientes matrices:

$$F = \begin{pmatrix} 1+a-b & -1 \\ 2+b & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3-d \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2 \\ c & -2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}$$

b) Determina el exponente n de la matriz A para que se cumpla :

$$A^n = \begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix}, donde\ A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo primero que tienes que hacer son las multiplicaciones a ambos lados de la igualdad para poder posteriormente, igualar las dos matrices y determinar el valor de los parámetros:

$$F \cdot G = H \cdot K \to \begin{pmatrix} 1+a-b & -1 \\ 2+b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2 \\ c & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2-2a+2b-4 & 1+a-b-3+d \\ -4-2b+4 & 2+b+3-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a-2-2b & 4a+4-6 \\ -c-2b & 2c-6 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{cases} -2a+2b-6 = -2a-2b-2 \\ a-b+d-2 = 4a-2 \\ -2b = -c-2b \\ b-d+5 = 2c-6 \end{cases} \to con\ la\ primera\ ecuación \to 4b = 4 \to b = 1$$

Sabiendo que el parámetro b tiene valor 1, puedes despejar de la tercera ecuación, el valor de c;

$$-2b = -c-2b \to c = 0$$

Ahora en la última ecuación; $b-d+5 = 2c-6 \to 1-d+5 = -6 \to d = 12$

Por último, en la segunda ecuación: $a-b+d-2 = 4a-2 \to -3a = b-d+2-2 \to$

$$a = \frac{11}{3}$$

NO DUDES NUNCA DE ESTE TIPO DE RESULTADOS Y MENOS EN LA SELECTIVIDAD, LO HACEN PARA QUE PIERDAS EL TIEMPO Y TE PONGAS NERVISO.

Para terminar con el ejercicio, en el apartado b, quiere que le digas cual tiene que ser el exponente de la matriz A para que se cumpla;

$$A^n = \begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix}, donde\ A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Como puedes comprobar, dependiendo de si el exponente es par o impar, tienes un resultado o un patron diferente, por eso, quiero que te centres unicamente en el que a ti te interesa, que es un exponente par, ya que 20 es un numero par. Y ademas de eso, tambien quiero que preste especial atención al signo, ya que en los exponentes pares el signo es alterno. Entonces;

Como tu estas trabajando con una matriz de exponente par y el resultado del signo es negativo, la vas a comparar con A^2, A^6 ...

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & -2^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix}$$

$$-2^{\frac{n}{2}} = -2048 \to 2^{\frac{n}{2}} = 2048 \to \frac{n}{2} = \log_2 2048 \to \frac{n}{2} = 11 \to n = 22$$

(JUNIO 2017)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix}\ y\ E=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) ¿qué valores deben tomar los parametrois desconococidos x,y,z para que se verifique la igualdad matricial $A \cdot B = C$?

b) Calcula las componentes de la matriz E^{20}. Pista: aprovecha las simetrias en la matriz E o el calculo de sus primera potencias para identificar un patron.

Lo primero que tienes que hacer, es plantear la igualdad y realizar los cálculos:

$$\begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3x+6y & 2x-6 \\ -9-5y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora lo siguiente que tienes que hacer, es igualar las dos matrices, para componente a componente ir determinando los parámetros:

$3x+6y=9$

$2x-6=z$

$-9-5y=-z \to z=9+5y$

$-1=-1$

Con las dos ecuaciones que tienes en amarillo; $2x-6=9+5y$

Ahora con las dos ecuaciones que están subrayadas en verde, puedes hacer un sistema para determinar el valor del parámetro x e y;

$$\begin{cases} 3x+6y=9 \\ 2x-5y=15 \end{cases} con\ primera\ ecuación \to x=3-2y \to 2(3-2y)-5y=15 \to -9y=9 \to y=-1$$

Por tanto, $x=3-2(-1) \to x=5$

Ahora sabiendo estos parámetros, puedes calcular el valor de z;

$$z=2x-6 \to z=10-6 \to z=4$$

En el apartado b, el ejercicio quiere que calcules la potencia 20 de la matriz E, por tanto,

$E^2=E\cdot E=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$E^3=E^2\cdot E=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$

$E^4=E^3\cdot E=\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$

Como puedes comprobar, tal y como te adelanta el enunciado, tienes que diferenciar entre las matrices de potencia par y de las que tienen potencia impar:

$$E^n \to n: par \to E^n = \begin{pmatrix} 5^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & 5^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$$

Como el enunciado quiere que calcules $E^{20}=\begin{pmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{pmatrix}$

(JULIO 2017)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$. encontrar las componentes de las matrices de dimensión 2x2, $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ y $H = \begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix}$ para que se cumplan las siguientes igualdades matriciales:

a) $A\ M\ B = C$
b) $A\ H\ B^{-1} = C \rightarrow AH = CB$

Lo primero que vas hacer en este caso es calcular la matriz inversa de B y la inversa de A, ya que las vas a necesitar, en este caso lo hare aplicando la definicion de inversa:

$$B \cdot B^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ -2a+2c & -2b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+3c=1 \\ -2a+2c=0 \\ b+3d=0 \\ -2b+2d=1 \end{cases}$$

Ahora con lo que esta subrayado de amarillo vas hacer un sistema y con lo que esta de verde otro sistema para sacar los elementos que forman la matriz inversa de B:

Sistema amarillo:

$$a = 1-3c \rightarrow -2(1-3c)+2c = 0 \rightarrow -2+6c+2c = 0 \rightarrow c = \frac{1}{4}$$

$$a = 1-3\frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

Sistema verde:

$$b = -3d \rightarrow -2(-3d)+2d = 1 \rightarrow 6d+2d = 1 \rightarrow d = \frac{1}{8}$$

$$b = -3 \cdot \frac{1}{8} \rightarrow b = \frac{-3}{8}$$

Por tanto,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Ahora tienes que calcular la inversa de la matriz A, para este caso voy a utilizar un procedimiento diferente, lo hare con GAUSS (hacer ceros):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow la\ primera\ fila\ entre\ 2\ y\ la\ segunda\ fila\ entre -1 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Por tanto la inversa de la matriz A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora con toda esta informacion lo unico que tienes que hacer es despejar bien de cada una de las ecuaciones matriciales la incognita correspondiente:

$$A\ M\ B = C \rightarrow M = A^{-1}CB^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A\ H\ B^{-1} = C \rightarrow H = A^{-1}CB$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ -13 & 49 \end{pmatrix}$$

(JUNIO 2016)

Considerense las siguinetes matrices y los parametros desconocidos $u\ y\ v$:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2 & u\\ v & -2\end{pmatrix}$$

a) Determinar los valores de los parametros $\alpha, \beta, u\ y\ v$ para que se cumpla la siguiente igualdad matricial, siendo B^t la matriz traspuesta de B.

$$A\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}B^t + C\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ \beta & 0\end{pmatrix} = D$$

b) Siendo A^{-1}la matriz inversa de A, encontrar los valores de las constantes a y b que verifiquen:

$$A^{-1}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}B^t + C\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ \beta & 0\end{pmatrix} = D \rightarrow Lo\ primero\ intercambia\ la\ informacion\ que\ tienes\ en\ la\ ecuacion:$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ \beta & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & u\\ v & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\alpha & -\beta\\ -3\alpha & 3\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -2\alpha\\ 4\beta & -\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & u\\ v & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\beta & 2\alpha-2\beta\\ 6\beta & 3\alpha+6\beta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -2\alpha\\ 4\beta & -\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & u\\ v & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\beta & -2\beta\\ 10\beta & 2\alpha+6\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & u\\ v & -2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}-2\beta = 2\\ -2\beta = u\\ 10\beta = v\\ 2\alpha+6\beta = -2\end{cases} \rightarrow \beta = -1\ ;\ u = 2\ ;\ v = -10\ \ \alpha = 2$$

Para el segundo apartado es algo muy parecido, pero con otro tipo de operaciones:

$$A^{-1}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

Primero tienes que calcular la inversa de A:

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}2a-c = 1\\ -3a+3c = 0\\ 2b-d = 0\\ -3b+3d = 1\end{cases} \rightarrow Resolviendo: \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ 1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix} = A^{-1}$$

Ahora cuando ya tienes la inversa, hacer los cálculos es relativamente sencillo:

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ 1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}a+\frac{b}{3}\\ a+\frac{2b}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2b+1\\ -a+2b+2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a+\frac{b}{3} = 2b+1\\ a+\frac{2b}{3} = -a+2b+2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}3a+b = 6b+3\\ 3a+2b = -3a+6b+6\end{cases} \rightarrow \begin{cases}3a-5b = 3\\ 6a-4b = 6\end{cases} \rightarrow \begin{cases}6a-10b = 6\\ 6a-4b = 6\end{cases}$$

Ahora aplicando el método de reducción y restando la primera ecuación con la segunda:

$$-6b = 0 \rightarrow b = 0\quad entonces\quad a = 1$$

(JUNIO 2015)

a) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.Calcular la matriz X para la que se verifica la ecuacion matricial $AX = B - C$

b) Halla la matriz Y para la que se verifica la ecuacion matricial $YA = B^2$

Estos ejercicios los puedes hacer de dos formas diferentes:

1. Reolviendo la ecuacion matricial utilizando la definicion de inversa:

$$AX = B - C \rightarrow X = A^{-1}(B - C)$$

2. Realizando un sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tu decides el metodo que mejor sabes hacer, pero ambos caminos tienen que llevarte al mismo resultado. Yo lo hare en este caso siguiendo el segundo camino:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a + c = -3 \\ -c = -4 \\ 2b + d = 5 \\ -d = 8 \end{cases} \rightarrow c = 4 \ ; \ d = -8 \ ; \ a = \frac{-7}{2} \ ; \ b = \frac{13}{2}$$

$$X = \begin{pmatrix} -7/2 & 13/2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

En el siguiente apartado tienes que calcular la matriz Y. En este caso voy a utilizar el calculo de la inversa para hacerlo.

$$YA = B^2 \rightarrow Y = B^2 A^{-1}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

El calculo de la inversa de la matriz A:

$$AA^{-1} = I \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ -c = 0 \\ 2b + d = 0 \\ -d = 1 \end{cases} \rightarrow c = 0; a = \frac{1}{2}; \ d = -1; \ b = \frac{1}{2} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(JULIO 2015)

a) Calcular los valores de a, b, c, d, que verifiquen la siguiente ecuacion matricial:

$$\begin{pmatrix} 2a-2 & 2b \\ c+1 & d+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & d-2 \\ 2c & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular A^{20}. Razona tu respuesta.

$$\begin{pmatrix} 2a-2 & 2b \\ c+1 & d+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & d-2 \\ 2c & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+2 & 2b+d-2 \\ 3c+1 & 2a+d+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2a+2 = a \to a = -2 \\ 3c+1 = 4 \to c = 1 \\ 2b+d-2 = b \to b+d = 2 \to b = 0 \\ 2a+d+2 = 0 \to d = 2 \end{cases}$$

Para realizar el segundo apartado de este ejercicio tienes que ver el patron que se da en las primera potencias de la matriz de A:

$$A^2 = AA \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Practicamente ya puedes ver el patron que se esta desarrollando;

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix} \to si\ la\ n\ es\ 20 \to A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -20 & 1 \end{pmatrix}$$

(JUNIO 2014 A1)

Sena las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. Calcular la matriz X para la que se verifica la ecuación matricial $XA^2=B$

Hallar la matriz A^{17}. Razona el procedimiento.

Para resolver la primera pregunta que nos hace el ejercicio, tienes que despejar la incógnita X de la siguiente ecuación matricial:

$$XA^2=B\rightarrow\quad X=B(A^2)^{-1}$$

Date cuenta de que primero tienes que calcula $A^2=A\cdot A$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

Ahora tienes que calcular la inversa de la matriz que acabas de calcular, puedes hacer el procedimiento que te dé la gana:

$$(A^2)^{-1}\cdot A^2=I\rightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}a-2b & b\\ c-2d & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ahora con lo que te acabo de subrayar (Azul y Verde) vas hacer un sistema de ecuaciones para despejar los parametros:

$$\begin{cases}a-2b=1\\ \quad b=0\end{cases}\rightarrow b=0\rightarrow a=1$$

Ahora con los otros colores (Morado y Amarillo) haces otro sistema para sacar el resto de parametros:

$$\begin{cases}c-2d=0\\ \quad d=1\end{cases}\rightarrow d=1\rightarrow c=2$$

$$(A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=B(A^2)^{-1}\rightarrow B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -2 & -2\end{pmatrix}$$

Ahora tienes que hallar la matriz A^{17}, para eso tienes que realizar varios cálculos: $A^2, A^3, A^4, \ldots$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^2\cdot A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^5=A^4\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 5 & -1\end{pmatrix}$$

Entonces, tienes que diferenciar cuando el exponente es par e impar:

$$n\rightarrow par\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ -n & 1\end{pmatrix}\qquad n\rightarrow impar\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0\\ n & -1\end{pmatrix}$$

Entonces; $A^{17}\rightarrow n\ es\ impar\ entonces\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 17 & -1\end{pmatrix}$

(JULIO 2014 B1).- Calcular las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matricial:

$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Hallar la matriz $X^2 + Y^2$

Para resolver este sistema de ecuaciones matriciales, el metodo que te aconsejo que utilices es el de reducción;

$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow multiplico\ por\ 2\ a\ la\ segunda\ ecuación \begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ 4X + 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$5X = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabiendo ahora que la matriz X tiene ese valor, solo tienes que despejar la incognita ''y'';

$$X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \quad Y = \frac{\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - X}{-2} \rightarrow \quad Y = \frac{\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} \rightarrow$$

$$Y = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora el ejercicio quiere que hagamos una operación muy sencilla;

$$X^2 + Y^2$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Y^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(**JULIO 2013 B1**) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 10\\-3 & -6\end{pmatrix}\ y\ B=\begin{pmatrix}-7 & 6\\15 & -5\end{pmatrix}$. Hallar las matrices X, Y, para que se cumpla el siguiente sistema matricial:

$$\begin{cases}2X+Y=A\\-3X+2Y=B\end{cases}$$

Siendo A^t la matriz traspuesta de la matriz A, calcular el producto $A\cdot B\cdot A^t$

Lo primero que vas hacer es resolver el problema utilizando en este caso el metodo de reduccion:

$$\begin{cases}2X+Y=A\\-3X+2Y=B\end{cases}\rightarrow x(-2)a\ la\ primera\ ecuación\rightarrow\begin{cases}-4X-2Y=-2A\\-3X+2Y=B\end{cases}$$
$$-7X\quad=-2A+B$$

Ahora tienes que hacer las operaciones correspondientes para despejar el valor de la matriz X, recuerda que un numero si que puede pasar dividiendo al otro lado de la igualdad:

$$X=\frac{1}{-7}\left[-2\begin{pmatrix}0 & 10\\-3 & -6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7 & 6\\15 & -5\end{pmatrix}\right]\rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 2\\-3 & -1\end{pmatrix}$$

Ahora sabiendo X despejamos de cualquiera de las dos ecuaciones la matriz Y:

$$2X+Y=A\rightarrow Y=A-2X\rightarrow Y=\begin{pmatrix}0 & 10\\-3 & -6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 2\\-3 & -1\end{pmatrix}\rightarrow Y=\begin{pmatrix}-2 & 6\\3 & -4\end{pmatrix}$$

Para terminar con el ejercicio, quiere que hagas una operación muy sencilla, multiplicar tres matrices;

$$A\cdot B\cdot A^t=\begin{pmatrix}0 & 10\\-3 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7 & 6\\15 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -3\\10 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}150 & -50\\111 & 12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -3\\10 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-500 & -150\\120 & 135\end{pmatrix}$$

C2 Academia

JUNIO 2013 B1.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, y la ecuación $2A^2 + xA - yI = 0$. Calcular los valores de x e y para los que se verifica dicha ecuación.
Hallar la matriz X para la que se verifica la siguiente ecuación matricial:

$$A + 2X = 3A^t$$

Antes de empezar con este ejercicio, quiero que recuerdes que, en este tipo de ejercicios, cuando las letras son minúsculas representan números, cuando las letras son mayúsculas, representan matrices.

Una vez recordado lo anterior, adelante con los cálculos de la siguiente ecuación matricial:

$$2A^2 + xA - yI = 0$$

Fíjate que primeramente necesitas calcular $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

Sabiendo el resultado de esta operación ya casi tienes el ejercicio resuelto, plantea toda la ecuación y resuelve la igualdad:

$$2A^2 + xA - yI = 0 \rightarrow 2\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x & x \\ 3x & -x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 14 - 2x - y & -6 + x \\ -18 + 3x & 8 - x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 14 - 2x - y = 0 \\ -6 + x = 0 \\ -18 + 3x = 0 \\ 8 - x - y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 6; y = 2$$

La segunda parte del ejercicio quiere que calcules la matriz X para que se verifique la siguiente ecuación matricial:

$$A + 2X = 3A^t \rightarrow 2X = 3A^t - A \rightarrow X = \frac{1}{2}(3A^t - A)$$

$$X = \frac{1}{2}\left[3\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right] \rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

JUNIO 2012 B1.- Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \ y \ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra la matriz X que cumpla la ecuación $BX = A + B$
Siendo A^t la matriz traspuesta de la matriz A, calcula AXA^t

$$BX = A + B$$

Lo primero que tienes que hacer es despejar de forma correcta la matriz X aplicando la inversa de la matriz B, recuerda que el calculo de la matriz inversa lo puedes hacer siguiendo el procedimiento que te de la gana, usa el que mejor sepas hacer;

$$BX = A + B \rightarrow B^{-1}BX = B^{-1}(A + B) \rightarrow X = B^{-1}(A + B)$$

¿Cómo calcula la inversa de la matriz B?

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow Fila\ 1\ menos\ fila\ 2 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow Fila\ 2\ mas\ dos\ veces\ fila\ 1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1}(A + B) \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right) \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ahora el ejercicio quiere que hagas unas multiplicaciones entre matrices muy sencilla, el problema de este apartado es que para hacerlo, tienes que tener bien el apartado anterior.

$$AXA^t \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^t \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ -20 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 45 & -60 \\ -50 & 75 \end{pmatrix}$$

JULIO 2012 B1.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, y la ecuacion $A^2 - xA - yI = 0$. Calcular los valores de x e y para que se verifique la ecuación.

Hallar la matriz X para la que se verifica la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} + 2X$$

Lo primero que tienes que hacer es plantear la matriz A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 2x \\ -2x & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & o \\ o & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x - y = 0 \\ 6 - 2x = 0 \\ -6 + 2x = 0 \\ -3 - x - y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3 \ ; \ y = -6$$

Ahora tienes que despejar la incognita X de la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} + 2X$$

$$+\frac{3}{2}X - 2X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow -\frac{1}{2}X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 16 \\ 0 & -16 & -12 \end{pmatrix}$$

JUNIO 2011 B1.- Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz inversa de $A - I$
Hallar la matriz B tal que $A + B = AB$

Lo primero que tienes que hacer es la resta de la matriz A menos la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora que ya sabes cual es la matriz resultante, tienes que hacer su inversa, recuerda que puedes hacer el procedimiento que te de la gana, elige el que mejor sepas hacer:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to Fila\ 1 - Fila\ 2 \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to Fila\ 2 - Fila\ 1 \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Por tanto, despues dehacer las transformaciones necesarias, ya tienes la inversa: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Para terminar tienes que calcula la matriz B para que cumpla la siguiente expresión:

$$A + B = AB \to \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3+x & 1+y \\ 1+z & 2+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+z & 3y+t \\ x+2z & y+2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3+x = 3x+z \\ 1+z = x+2z \\ 1+y = 3y+t \\ 2+t = y+2t \end{cases} \to \begin{matrix} -2x - z = -3 \\ -x - z = -1 \\ -2y - t = -1 \\ -y - t = -2 \end{matrix} \to con\ las\ dos\ primeras\ ecuaciones \to x = 2; z = -1$$

$$Con\ las\ dos\ ultimas\ ecuaciones \to y = -1\ ; t = 3\ por\ tanto; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Otro procedimiento mas sencillo: $A + B = AB \to A = AB - B \to A = (A - I)B \to (A - I)^{-1}A = B$

JUNIO 2010 A1.-Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices $BAC\ \ y\ \ A^tC$

Los valores que deben tener a y b para que se cumpla que $BAC = A^tC$

Para empezar tienes que calcular las dos multiplicaciones entre matrices por separado:

$$BAC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & 2+b \\ a+2 & 2+2b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-1+2+b \\ -a-2+2+2b \end{pmatrix}$$

$$A^tC = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+1 \\ -2+b \end{pmatrix}$$

Ahora tienes que igualar los dos resultados que has obtenido y asi poder despejar los valores de los parametros:

$$\begin{pmatrix} -a-1+2+b \\ -a-2+2+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+1 \\ -2+b \end{pmatrix} \to \begin{matrix} -a-1+2+b = -a+1 \\ -a-2+2+2b = -2+b \end{matrix} \to SISTEMA \to \begin{matrix} b = 0 \\ a = 2 \end{matrix}$$