Recta tangente (tipo I)

1. Calcula la recta tangente de las siguientes funciones en los puntos señalados.

1. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2}\ ;\ \ x_0 = 2}$

$$y = y_0 + m(x - x_0) \rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} f(x_0) = f(2) = \dfrac{(2)^3}{2} + \dfrac{3}{2}(2)^2 - \dfrac{(2)}{2} = 4 + 6 - 1 = 9 \\ f'(x_0) = m = \dfrac{3(2)^2}{2} + 3(2) - \dfrac{1}{2} = 6 + 6 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{23}{2} \end{cases}$$

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) \rightarrow y = 9 + \frac{23}{2}(x - 2) \rightarrow y = \frac{23}{2}x - 14$$

2. $\boldsymbol{f(x) = x \cdot 2^{x+1}\ ;\ \ x_0 = -1}$

$$y = y_0 + m(x - x_0) \rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f'(x) = 2^{x+1} + x \cdot 2^{x+1} \cdot \ln 2$$

$$\begin{cases} f(x_0) = f(-1) = (-1) \cdot 2^{(-1)+1} = -1 \\ f'(x_0) = f'(-1) = m = 2^{(-1)+1} + (-1) \cdot 2^{(-1)+1} \cdot \ln 2 = 1 - \ln 2 \end{cases}$$

$$y = f(-1) + f'(-1)(x + 1) \rightarrow y = -1 + (1 - \ln 2)(x + 1) \rightarrow y = -1 + (1 - \ln 2)\,x + 1 - \ln 2 \rightarrow$$

$$y = (1 - \ln 2)\,x - \ln 2$$

3. $\boldsymbol{f(x) = (5x - 2)^3\ ;\ \ x_0 = \frac{1}{5}}$

$$y = y_0 + m(x - x_0) \rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f'(x) = 3 \cdot (5x - 2)^2 \cdot 5 \rightarrow f'(x) = 15(5x - 2)^2$$

$$\begin{cases} f(x_0) = f\left(\dfrac{1}{5}\right) = \left(5 \cdot \dfrac{1}{5} - 2\right)^3 = -1 \\ f'(x_0) = m = f'^{\left(\frac{1}{5}\right)} = 15\left(5 \cdot \dfrac{1}{5} - 2\right)^2 = 15 \end{cases}$$

$$y = f\left(\frac{1}{5}\right) + f'\left(\frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) \rightarrow y = -1 + 15\left(x - \frac{1}{5}\right)$$

$$y = 15x - 4$$

4. $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1}\ ;\ \ x_0 = 0}$

$$f'(x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$$

$$\begin{cases} f(0) = \sqrt{0^2 + 3(0) + 1} = \sqrt{1} = 1 \\ f'(0) = \dfrac{2(0) + 3}{2\sqrt{(0)^2 + 3(0) + 1}} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$y = f(0) + f'(0)(x-0) \rightarrow y = 1 + \frac{3}{2}x$$

5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$; $x_0 = 8$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x-4}}}{x-4} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2(x-4)\sqrt{x-4}}$$

$$\begin{cases} f(8) = \frac{1}{\sqrt{8-4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \\ f'(8) = \frac{-1}{2(8-4)\sqrt{8-4}} = \frac{-1}{8\sqrt{4}} = \frac{-1}{16} \end{cases}$$

$$y = f(8) + f'(8)(x-8) \rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(x-8) \rightarrow y = -\frac{1}{16}x + 1$$

6. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$; $x_0 = -1$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{cases} f(-1) = \frac{(-1)^3}{(-1)^2+1} = \frac{-1}{2} \\ m = f'(-1) = \frac{(-1)^4 + 3(-1)^2}{((-1)^2+1)^2} = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

$$y = f(-1) + f'(-1)(x+1) \rightarrow y = -\frac{1}{2} + 1(x+1) \rightarrow y = x + \frac{1}{2}$$

7. $f(x) = \frac{x^4}{(x-1)^2}$; $x_0 = 2$

$$f'(x) = \frac{4x^3(x-1)^2 - x^4 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \rightarrow f'(x) = \frac{2x^4 - 4x^3}{(x-1)^3}$$

$$\begin{cases} f(2) = \frac{(2)^4}{(2-1)^2} = 16 \\ f'(2) = m = \frac{2(2)^4 - 4(2)^3}{(2-1)^3} = 0 \end{cases}$$

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) \rightarrow y = 16 + 0(x-2) \rightarrow y = 16$$

Recta tangente (tipo 2)

1. Calcula la recta tangente a la parábola $y^2 = 20x$ sabiendo que dicha recta forma un ángulo de 45^o con el eje OX.

Lo primero tienes que saber cuál es la curva con la que estás trabajando.

$$y^2 = 20x \rightarrow y = \sqrt{20x}$$

Calculamos la derivada de la función $\rightarrow y' = \frac{20}{2\sqrt{20x}} = \frac{10}{\sqrt{20x}}$

Cuando te dan el ángulo que forma con el eje OX te están dando la pendiente $\rightarrow m = \tan 45 = 1$

Sabiendo la pendiente el siguiente paso es saber cuál es el punto de tangencia, para eso debes de conocer qué;

$$m = f'(x_0)$$

$$1 = \frac{10}{\sqrt{20x}}$$

$$\sqrt{20x} = 10 \rightarrow 20x = 100 \rightarrow x = \frac{100}{20} \rightarrow x = 5$$

$$Recta\ tangente \rightarrow y = y_0 + m(x - x_0) \rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

En tu caso en concreto:

$$y = f(5) + f'(5)(x - 5)$$

$$\begin{cases} f(5) = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} = 10 \\ f'(5) = m = \dfrac{10}{\sqrt{20 \cdot 5}} = \dfrac{10}{10} = 1 \end{cases}$$

$$y = 10 + 1(x - 5) \rightarrow y = 10 + x - 5 \rightarrow y = x + 5$$

2. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{x^3}{3}$ sabiendo que la pendiente de la recta tangente es $m = 4$.

$$y = \frac{x^3}{3} \rightarrow y' = \frac{3x^2}{3} \rightarrow y' = x^2$$

$$m = f'(x) \rightarrow 4 = x^2 \rightarrow \pm 2 = x$$

Vas a tener dos rectas tangentes, ya que, tienes dos puntos de tangencia $x = 2$; $x = -2$

$$y = y_0 + m(x - x_0) \rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\begin{cases} y = f(2) + f'(2)(x - 2) \\ y = f(-2) + f'(-2)(x + 2) \end{cases}$$

$$\rightarrow f(2) = \frac{(2)^3}{3} = \frac{8}{3} \quad ; \quad f'(2) = (2)^2 = 4 \quad \rightarrow y = \frac{8}{3} + 4(x - 2)$$

$$\rightarrow f(-2) = \frac{(-2)^3}{3} = \frac{-8}{3} \quad ; \quad f'(-2) = (-2)^2 = 4 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-8}{3} + 4(x + 2)$$

3. ¿En qué punto la curva $y = x^3 + 5$ tiene una recta tangente que es paralela a la recta de ecuación $12x - y = 17$? ¿Y a la recta $x + 3y = 2$?

Cuando habla de rectas tangentes paralelas, quiere decir que tienen la misma pendiente.

Por tanto, lo más importante por ahora es saber identificar la pendiente de cada una de las rectas que te da el enunciado:

$$12x - y = 17 \rightarrow -y = 17 - 12x \rightarrow y = 12x - 17 \rightarrow m = 12$$

Para saber ahora el punto donde hace tangencia la recta con la curva, tienes que igualar la derivada de la curva ($y = x^3 + 5$) a la pendiente:

$$f'(x) = y' = 3x^2$$

$$f'(x) = m \rightarrow 3x^2 = 12 \rightarrow x = \sqrt{\frac{12}{3}} \rightarrow x = \pm 2$$

Los puntos de tangencia en los que la recta tangente es paralela a $12x - y = 17$ son $x \pm 2$.

Tienes que hacer el mismo procedimiento con la otra recta:

$$x + 3y = 2 \rightarrow 3y = 2 - x \rightarrow y = \frac{2 - x}{3} \rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

$$f'(x) = m \rightarrow 3x^2 = -\frac{1}{3} \rightarrow x = \sqrt{-\frac{3}{3}} \rightarrow x \rightarrow \nexists$$

No existen puntos de tangencia donde la recta sea paralela a $x + 3y = 2$

4. Calcula en qué punto la siguiente curva $y = x^3 - 12x$ tiene una recta tangente que sea paralela al eje OX.

$$y' = 3x^2 - 12$$

Al ser paralela al eje OX eso quiere decir que la pendiente de la recta tangente será cero.

$$m = 0$$

$$3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{12}{3}} \rightarrow x = \pm 2$$