Derivabilidad

1. Calcula la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & x \geq 3 \end{cases}$$

Lo primero que tienes que calcular es la continuidad de la función en los puntos $x = 0$ y $x = 3$

Continuidad en $x = 0$

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

De aquí podemos afirmar que la función es continua en $x = 0$, ya que, los tres valores que has calculado son iguales.

Continuidad en $x = 3$

$$f(3) = -(3)^2 + 3(3) + 2 = -9 + 9 + 2 = 2$$

$$\lim_{x \to 3^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 3^+} -x^2 + 3x + 2 = -(3)^2 + 3(3) + 2 = -9 + 9 + 1 = 2$$

De aquí podemos afirmar que la función NO es continua en $x = 3$, ya que, los tres valores que has calculado NO son iguales.

Ahora, al ver que la función es continua en $x = 0$ puedes calcular la derivabilidad en dicho punto.

Para eso tienes que calcular primero la derivada de la función:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 0 & 0 < x < 3 \\ -2x + 3 & x > 3 \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 0$

$$f'(0^-) = e^0 = 1$$

$$f'(0^+) = 0$$

Como estos dos valores son diferentes la función no es derivable en $x = 0$

Derivabilidad en $x = 3$

NO SE PUEDE CALCULAR LA DERIVABILIDAD YA QUE LA FUNCION NO ES CONTINUA EN DICHO PUNTO.

2. Calcula cuales tienen que ser los valores de a y b para que la siguiente función sea continua y derivable:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & x < -1 \\ ax + b & -1 \leq x < 0 \\ 3x^2 + 2 & 0 \leq x \end{cases}$$

Lo primero que tienes que calcular es la continuidad de la función en los puntos $x = -1$ y $x = 0$

Continuidad en $x = -1$

$$\left.\begin{array}{c} f(-1) = -a + b \\ \lim_{x\to -1^-} 2x + a = a - 2 \\ \lim_{x\to -1^+} ax + b = -a + b \end{array}\right\}$$

De aquí podemos afirmar que la función es continua en $x = -1$ si se da la siguiente igualdad: $-a + b = a - 2$

Continuidad en $x = 0$

De aquí podemos afirmar que la función es continua en $x = 0$ si se da la siguiente igualdad: $b = 2$

$$\left\{\begin{array}{c} f(0) = 3(0)^2 + 2 = 2 \\ \lim_{x\to 0^-} ax + b = b \\ \lim_{x\to 0^+} 3x^2 + 2 = 3(0)^2 + 2 = 2 \end{array}\right.$$

Sabiendo que $b = 2$ puedes determinar el valor del parámetro a

$$-a + b = a - 2$$

$$-a + 2 = a - 2 \rightarrow -2a = -4 \rightarrow a = 2$$

A nivel resumen, los parámetros, para que la función sea continua, tienen que ser $a = 2$ y $b = 2$

Ahora puedes calcular la derivabilidad en $x = -1$ y $x = 0$ y analizar que valores de los parámetros obtienes y después hacer una valoración final:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & x < -1 \\ a & -1 < x < 0 \\ 6x & x > 0 \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -1$

$$\left.\begin{array}{c} f'(-1^-) = \lim_{x\to -1^-} 2 = 2 \\ f'(-1^+) = \lim_{x\to -1^+} a = a \end{array}\right\}$$

Para que la función sea derivable en $x = -1$, el valor del parámetro a tiene que ser 2

Derivabilidad en $x = 0$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} a = a$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} 6x = 6(0) = 0$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$, el valor del parámetro a tiene que ser 0

Para terminar, debes de hacer un resumen con los parámetros que has obtenido.

Partiendo de la premisa que una función antes de ser derivable tiene que ser continua. Analiza los resultados de los parámetros

$$\begin{cases} a = 2 & \textit{Continua y derivable en } x = -1 \\ b = 2 \rightarrow & \textit{funcion continua en } x = -1 \textit{ y } x = 0. \textit{ Este valor no influye en la derivabilidad} \\ a = 0 & \textit{este valor no puedes asumir ya que la funcion no seria continua} \end{cases}$$

3. Teniendo la función $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & x \le 0 \\ a\sqrt{b - x} & x > 0 \end{cases}$ determina el valor de los parámetros a y b sabiendo que la función es derivable.

Continuidad en $x = 0$

$$f(0) = 0 + 2e^0 = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} x + 2e^{-x} = 0 + 2e^0 = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} a\sqrt{b - x} = a\sqrt{b}$$

Para que la función sea continua $2 = a\sqrt{b}$

Derivabilidad $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & x < 0 \\ \dfrac{-a}{2\sqrt{b - x}} & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} x + 2e^{-x} = 1 - 2e^0 = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} a\sqrt{b - x} = \frac{-a}{2\sqrt{b - 0}} = \frac{-a}{2\sqrt{b}}$$

Para que la función sea derivable $-1 = \dfrac{-a}{2\sqrt{b}}$

Con la información que has calculado con la continuidad y con la derivabilidad tienes que hacer un sistema para hallar los valores de los parámetros:

$$\begin{cases} 2 = a\sqrt{b} \\ -1 = \dfrac{-a}{2\sqrt{b}} \to 2\sqrt{b} = a \to 4b = a^2 \to b = \dfrac{a^2}{4} \end{cases}$$

Sustituye el valor de b en la primera ecuación:

$$2 = a\sqrt{\frac{a^2}{4}} \to 2 = a \cdot \frac{a}{2} \to 4 = a^2 \to a = \pm 2$$

Sabiendo el valor de a puedes deducir el parámetro b:

$$b = \frac{(\pm 2)^2}{4} \to b = 1$$

4. Calcula a y b para que las siguientes funciones sean derivables:

- $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & x > 2 \end{cases}$

Continuidad en $x = 2$

$$f(2) = a(2)^2 + 3(2) = 4a + 6$$

$$\lim_{x \to 2^-} ax^2 + 3x = a(2)^2 + 3(2) = 4a + 6$$

$$\lim_{x \to 2^+} x^2 - bx - 4 = (2)^2 - b(2) - 4 = -2b$$

Para que la función sea continua:
$4a + 6 = -2b$

Derivabilidad en $x = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & x < 2 \\ 2x - b & x > 2 \end{cases}$$

$$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} 2ax + 3 = 2a(2) + 3 = 4a + 3$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} 2x - b = 2(2) - b = 4 - b$$

Para que la función sea derivable
$4a + 3 = 4 - b$

Por tanto, para que la función sea continua y derivable tienes que resolver un sistema con las dos ecuaciones que están de gris:

$$\begin{cases} 4a + 6 = -2b \\ 4a + 3 = 4 - b \end{cases} \to \begin{cases} 4a + 2b = -6 \\ 4a + b = 1 \end{cases}$$

Utilizando el método de reducción:

$$b = -7$$

Sabiendo que $b = -7 \quad \to \quad 4a + 2(-7) = -6 \quad \to \quad 4a - 14 = -6 \quad \to \quad 4a = 8 \quad \to \quad a = 2$

- $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & x \leq 0 \\ ax + b & x > 0 \end{cases}$

Continuidad en $x = 0$

$$f(0) = (0)^3 - (0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} x^3 - x = (0)^3 - (0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} ax + b = a(0) + b = b$$

Para que la función sea continua:
$b = 0$

Derivabilidad en $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x < 0 \\ a & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} 3x^2 - 1 = 3(0)^2 - 1 = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} a = a$$

Para que la función sea derivable
$a = -1$

5. Sea la función derivable $f(x) = \begin{cases} e^{2ax-4b} & x < 1 \\ 1 - x \cdot ln\, x & x \geq 1 \end{cases}$ calcula los valores de a y b.

Continuidad en $x = 1$

$$f(1) = 1 - 1 \cdot \ln 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} e^{2ax-4b} = e^{2a-4b}$$

$$\lim_{x \to 1^+} 1 - x \cdot \ln x = 1$$

Para que la función sea continua en $x = 1$
$1 = e^{2a-4b}$

Derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{2ax-4b} \cdot (2a) & x < 1 \\ -\left(1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}\right) = -\ln x - 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} e^{2ax-4b} \cdot (2a) = e^{2a-4b} \cdot (2a)$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} -\ln x - 1 = -\ln(1) - 1 = -1$$

Para que la función sea derivable en $x = 1$
$-1 = e^{2a-4b} \cdot (2a)$

Ahora con las dos ecuaciones en gris, tienes que intentar sacar los valores de los parámetros a y b.

$$\begin{cases} 1 = e^{2a-4b} \\ -1 = e^{2a-4b} \cdot (2a) \end{cases} \rightarrow de\ la\ primera\ ecuación \rightarrow \ln 1 = 2a - 4b \rightarrow 0 = 2a - 4b \rightarrow 2a = 4b$$

Con esta información vas a la segunda ecuación y cambias $2a = 4b$.

$$-1 = e^{4b-4b} \cdot (4b) \ \rightarrow \ -1 = e^{0} \cdot (4b) \ \rightarrow \ b = -\frac{1}{4}$$

Sabiendo el valor de b eres capaz de determinar el valor de a:

$$2a = 4b \rightarrow 2a = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \rightarrow 2a = -1 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

6. Calcula los valores de los parámetros para que la función sea continua y derivable

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a-\cos x}{x} & x < 0 \\ bx & x \geq 0 \end{cases}$$

Continuidad en $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = b(0) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{a - \cos x}{x} = \dfrac{a-1}{0} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} bx = 0 \end{array}\right\}$$

Este ejercicio es algo fuera de lo normal. El límite de cero por la izquierda queda la siguiente expresión:

$$\frac{a-1}{0}$$

De aquí tienes que pensar y observar que si $a - 1 = 0$ estarías ante una indeterminación que puede resolver, por tanto, vas a obligar que eso ocurra:

$$a - 1 = 0 \rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{a - \cos x}{x} \rightarrow a = 1 \rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{0}{0} \rightarrow L'H \rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{sen\ x}{1} = 0$$

Ya has calculado el valor de a para que la función sea continua, ahora a por la derivabilidad:

Derivabilidad en $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ sen\ x - (a - \cos x)}{x^2} & x < 0 \\ b & x > 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$

$b = \frac{1}{2}$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\ sen\ x - (a - \cos x)}{x^2} = \frac{0 \cdot sen\ 0 - (1 - \cos 0)}{0^2} = \frac{0}{0} \to ind \to L'H$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{sen\ x + x\cos x - sen\ x}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f'(0^+) = b$$

7. Calcula m y n para que la función $f(x) = \begin{cases} mx + 1 & x \leq 1 \\ -2x^2 + 3x + n & x > 1 \end{cases}$

Continuidad en $x = 1$

$$f(1) = m(1) + 1 = m + 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} mx + 1 = m + 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} -2x^2 + 3x + n = -2(1) + 3(1) + n = n + 1$$

Para que la función sea continuidad en $x = 1$

$m + 1 = n + 1$

$m = n$

Derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} m & x < 1 \\ -4x + 3 & x > 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} m$$

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} -4x + 3 = -4(1) + 3 = -1$$

Para que la función sea derivabilidad en $x = 1$

$m = -1$

Sabiendo que $m = -1$ puedes calcular el valor de n con la ecuación que se ha creado con la continuidad:

$$m = n \to n = -1$$

8. Sabiendo que la función $f(x)=\begin{cases}2+ax^2 & x\leq -1\\ bx-1 & -1<x<3\\ ax-4 & x\geq 3\end{cases}$, calcula que valores deben tener los parámetros a y b para que la función sea continua y posteriormente determina si para esos valores la función es derivable.

Continuidad en $x=-1$

$$f(-1)=2+a(-1)^2=2+a$$

$$\lim_{x\to -1^-} 2+ax^2=2+a$$

$$\lim_{x\to -1^+} bx-1=-b-1$$

Para que la función sea continuidad en $x=-1$

$$2+a=-b-1$$

$$a+b=-3$$

Continuidad en $x=3$

$$f(3)=a(3)-4=3a-4$$

$$\lim_{x\to 3^-} bx-1=3b-1$$

$$\lim_{x\to 3^+} ax-4=a(3)-4=3a-4$$

Para que la función sea continuidad en $x=3$

$$3a-4=3b-1$$

$$3a-3b=3$$

Para que la función sea continua tienes que hacer un sistema con las ecuaciones que esta de color gris.

$$\begin{cases}a+b=-3\\ 3a-3b=3\end{cases}\rightarrow\ de\ la\ primera\ ecuación\rightarrow\ a=-3-b$$

Ahora sustituyes en la segunda ecuación el valor de a

$$3(-3-b)-3b=3\rightarrow\ -9-3b-3b=3\rightarrow\ -6b=12\rightarrow b=-2$$

Sabiendo que $b=-2\rightarrow a=-3-(-2)\rightarrow a=-1$

Ahora con estos valores de los parámetros a y b tienes que observar si se cumple la derivabilidad:

$$f'(x)=\begin{cases}2ax & x<-1\\ b & -1<x<3\\ a & x>3\end{cases}\rightarrow a=-1\,;b=-2\rightarrow\ f'(x)=\begin{cases}-2x & x<-1\\ -2 & -1<x<3\\ -1 & x>3\end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -1$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^-) = \lim_{x\to -1^-} -2x = 2 \\ f'(-1^+) = \lim_{x\to -1^+} -2 = -2 \end{array}\right\}$$

Como estos dos valores no coinciden la función no es derivable.

Derivabilidad en $x = 3$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = \lim_{x\to 3^-} -2 = -2 \\ f'(3^+) = \lim_{x\to 3^+} -1 = -1 \end{array}\right\}$$

Como estos dos valores no coinciden la función no es derivable.

9. Calcula el valor de los parámetros a y b para que la función sea derivable:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & x \le 1 \\ \dfrac{2}{x} & x > 1 \end{cases}$$

Continuidad en $x = 1$

$$f(1) = a(1)^2 + b(1) + 1 = a + b + 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x} = 2$$

Para que la función sea continuidad en $x = 1$

$a + b + 1 = 2$

$a + b = 1$

Derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x < 1 \\ \dfrac{-2}{x^2} & x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} 2ax + b = 2a + b \\ f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{-2}{x^2} = -2 \end{array}\right\}$$

Para que la función sea derivabilidad en $x = 1$

$2a + b = -2$

Para terminar, tienes que resolver el sistema con las dos ecuaciones que están pintadas de gris:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \to de\ la\ primera\ ecuación \to a = 1 - b$$

Sustituyendo esta información en la segunda ecuación:

$2(1 - b) + b = -2 \to 2 - 2b + b = -2 \to -b = -4 \to b = 4$ Sabiendo que $b = 4 \to a = 1 - b \to a = 1 - 4 \to b = -3$