PROPIEDADES DETERMINANTES

Propiedad	Ejemplo
El determinante de una matriz y de su traspuesta es el mismo $\lvert A\rvert = \lvert A^t\rvert$ Como consecuencia, toda propiedad que sea válida para filas lo será también para columnas y viceversa. Entonces llamaremos en general líneas a las filas o columnas	$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 8 \\ 11 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 17 \end{pmatrix} \; A^t = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 17 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \lvert A\rvert = 970 \\ \lvert A^t\rvert = 970 \end{cases} \rightarrow \lvert A\rvert = \lvert A^t\rvert = 970$
El determinante del producto de dos matrices cuadradas A y B es igual al producto de los determinantes de A y de B. Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden. $\lvert A\cdot B\rvert = \lvert A\rvert \cdot \lvert B\rvert$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \lvert A\rvert = -2$ $B = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \lvert B\rvert = 48$ $A\cdot B = \begin{pmatrix} 23 & 26 \\ 55 & 58 \end{pmatrix} \rightarrow \lvert A\cdot B\rvert = -96 = (-2)\cdot 48$
Si multiplicamos a una línea por un numero k, el determinante queda multiplicado por dicho numero: $k \cdot \lvert A\rvert$	$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 8 \\ 11 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow \lvert A\rvert = 970$ $\begin{vmatrix} 2\cdot 7 & -4 & 8 \\ 2\cdot 11 & 2 & 0 \\ 2\cdot 1 & 0 & 17 \end{vmatrix} = 2\cdot 970 = 1940$ $k = 2$
Si A es una matriz de orden n y k es un numero real: $\lvert k\cdot A\rvert = K^n \lvert A\rvert$	$\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} 5\cdot 4 & 5\cdot -1 \\ 5\cdot 3 & 5\cdot 9 \end{vmatrix} = 5^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$ $n = 2$
Si se intercambian dos líneas de un determinante entonces cambia su signo	$\begin{vmatrix} 7 & -4 & 8 \\ 11 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 17 \end{vmatrix} = 970\,;$ $\begin{vmatrix} 11 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 8 \\ 1 & 0 & 17 \end{vmatrix} = -970$
Si en un determinante los elementos de una línea son sumas de dos sumandos, se puede descomponer en suma de dos determinantes.	$\begin{vmatrix} 1+1 & 2 & 3 \\ 5+2 & 4 & 3 \\ 2+3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $-27 \quad = \quad -12 \quad + \quad (-15)$
Si una matriz tiene una línea nula su determinante vale cero.	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 23 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & -12 \end{vmatrix} = 0\,; \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 57 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$
Si una matriz tiene dos líneas proporcionales o iguales entonces su determinante vale cero.	$\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$ $F_1 \cdot 3 = F_3$
Si una línea puede expresarse como combinación lineal de otras líneas su determinante vale cero.	$\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 2-1 & 2\cdot 3-2 & 2\cdot 1-1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$
Si a una línea le sumamos otra multiplicada por un número real, su determinante no cambia.	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+4\cdot 2 & 4 \\ 3+1\cdot 2 & 1 \end{vmatrix} = -11$