CONTINUIDAD

1. Hallar el valor de k para que la función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3\\ k & x=3\end{cases}$$

Continuidad en $x=3$

$$f(3)=k$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{0}{0}\to ind\to\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}\to(x+3)\to\lim_{x\to 3^-}(x+3)=6$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{0}{0}\to ind\to\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}\to(x+3)\to\lim_{x\to 3^+}(x+3)=6$$

Para que la función sea continua en $x=3$ se tiene que cumplir lo siguiente $k=6$

2. Calcular cuánto debe valor a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x\leq 2\\ 3-ax^2 & x>2\end{cases}$$

¿Dónde tienes que calcular la continuidad?

En este caso en $x=2$

Continuidad en $x=2$

$$f(2)=2+1=3$$

$$\lim_{x\to 2^-}x+1=2+1=3$$

$$\lim_{x\to 2^+}3-ax^2=3-4a$$

Para que la función sea continua en $x=2$ se tiene que cumplir lo siguiente $3=3-4a\to a=0$

3. Determina los valores que deben tener a y b para que la función sea continua y que $f(2)=3$.

$$f(x)=\begin{cases}Ln\,x & 0<x<1\\ ax^2+b & 1\leq x\end{cases}$$

Continuidad en $x=1$

$$f(1)=a(1)^2+b=a+b$$

$$\lim_{x\to 1^-}\ln x=\ln 1=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}ax^2+b=a+b$$

Para que la función sea continua en $x=1$ se tiene que cumplir lo siguiente $a+b=0$

Al parecer de esta ecuación en color gris no puedes determinar cuales tienen que ser los valores de a y b, por eso, el problema, te da la información siguiente:

$$f(2)=3\to\ a(2)^2+b=3\to 4a+b=3$$

Ahora con las dos ecuaciones en gris tienes que resolver un sistema:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 4a+b=3 \end{cases} \rightarrow de\ la\ primera\ ecuación \rightarrow a=-b$$

En la segunda ecuación:

$$4a+b=3 \rightarrow -4b+b=3 \rightarrow\ -3b=3 \rightarrow b=-1$$

Sabiendo que $b=-1 \rightarrow a=1$

4. Calcula los valores de a y b para que la función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & x<0 \\ ax+b & 0\leq x<1 \\ 2 & x\geq 1 \end{cases}$$

Continuidad en $x=0$

$$\left.\begin{aligned} f(0)=a(0)+b=b \\ \lim_{x\to 0^-} x^2+2x-1=(0)^2+2(0)-1=-1 \\ \lim_{x\to 0^+} ax+b=a(0)+b=b \end{aligned}\right\}$$

Para que la función sea continua en $x=0$ se tiene que cumplir lo siguiente
$b=-1$

Continuidad en $x=1$

$$\left.\begin{aligned} f(1)=2 \\ \lim_{x\to 1^-} ax+b=a+b \\ \lim_{x\to 0^+} 2=2 \end{aligned}\right\}$$

Para que la función sea continua en $x=1$ se tiene que cumplir lo siguiente
$a+b=2$

Sabiendo que $b=-1 \rightarrow a+b=2 \rightarrow a-1=2 \rightarrow a=3$

5. Calcula el valor de m y n para que la función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & x\leq 1 \\ mx+n & 1<x\leq 3 \\ -x^2+10x-11 & x>3 \end{cases}$$

Tenemos que calcular la continuidad en

$$x=1\ \ y\, x=3$$

Continuidad en $x=1$

$$\left.\begin{aligned} f(1)=1+3=4 \\ \lim_{x\to 1^-} x+3=4 \\ \lim_{x\to 1^+} mx+n=m+n \end{aligned}\right\}$$

Para que la función sea continua en $x=1$ se tiene que cumplir lo siguiente
$m+n=4$

Continuidad en $x=3$

$$\left.\begin{aligned} f(3)=3m+n \\ \lim_{x\to 3^-} mx+n=3m+n \\ \lim_{x\to 3^+} -x^2+10x=-(3)^2+10(3)=-9+30=21 \end{aligned}\right\}$$

Para que la función sea continua en $x=3$ se tiene que cumplir lo siguiente
$3m+n=21$

Para terminar el ejercicio y determinar los valores de $m\ y\ n$ que hacen que la función sea continua tienes que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} m+n=4 \\ 3m+n=21 \end{cases} \rightarrow de\ la\ primera\ ecuación \rightarrow n=4-m$$

$$3m+n=21 \rightarrow 3m+(4-m)=21 \rightarrow 3m+4-m=21 \rightarrow 2m=17 \rightarrow m=\frac{17}{2}$$

Sabiendo el valor de m:

$$n=4-m \rightarrow n=4-\frac{17}{2} \rightarrow n=\frac{-9}{2}$$

6. Calcula los valores de a y b para que la función sea continua $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+b & x\leq 0 \\ sen\ (ax) & 0<x<\pi \\ (x-\pi)^2+1 & \pi\leq x \end{cases}$

Tienes que calcular la continuidad en los puntos $x=0\ y\ x=\pi$

Empieza calculando la continuidad en uno de los dos puntos, yo empezare por la continuidad en $x=0$. Recuerda que tienes que realizar los tres pasos:

$$f(0)=(0)^2+2(0)+b=b$$

$$\lim_{x\to 0^-} x^2+2x+b=(0)^2+2(0)+b=b$$

$$\lim_{x\to 0^+} sen\ (ax)=sen\ (a\cdot 0)=sen\ (0)=0$$

De aquí puedes deducir que $b=0$ ya que, para que la función sea continua en $x=0$ los tres valores tienen que ser iguales.

El siguiente paso es calcular la continuidad en $x=\pi$

$$f(\pi)=(\pi-\pi)^2+1=1$$

$$\lim_{x\to\pi^-} sen\ (ax)=sen\ (a\pi)$$

$$\lim_{x\to\pi^+} (x-\pi)^2+1=(\pi-\pi)^2+1=1$$

De aquí puedes deducir que $1=sen\ (a\pi)$ ya que, para que la función sea continua en $x=\pi$ los tres valores tienen que ser iguales.

Resolviendo la ecuación $1=sen\ (a\pi) \rightarrow a\pi=\frac{\pi}{2} \rightarrow a=\frac{1}{2}$

7. Determinar los valores de a y b para que la función sea continua

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3+ax^2-1 & x\leq -1 \\ \dfrac{a}{2x} & -1<x\leq 1 \\ e^{x-1}+2b & x>1 \end{cases}$$

Tienes que calcular la continuidad en los puntos $x=-1\ y\ x=1$

Empieza calculando la continuidad en uno de los dos puntos, yo empezare por la continuidad en $x = -1$. Recuerda que tienes que realizar los tres pasos:

De aquí puedes deducir que $-3 + a = \frac{a}{-2}$ ya que, para que la función sea continua en $x = -1$ los tres valores tienen que ser iguales.

$$\left\{\begin{array}{l} f(-1) = 2(-1)^3 + a(-1)^2 - 1 = -3 + a \\ \lim_{x \to -1^-} 2(x)^3 + a(x)^2 - 1 = 2(-1)^3 + a(-1)^2 - 1 = -3 + a \\ \lim_{x \to -1^+} \frac{a}{2x} = \frac{a}{-2} \end{array}\right.$$

Resolviendo la ecuación $-3 + a = \frac{a}{-2} \to 6 - 2a = a \to 6 = 3a \to a = 2$

El siguiente paso es calcular la continuidad en $x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = \frac{a}{2 \cdot 1} = \frac{a}{2} \\ \lim_{x \to 1^-} \frac{a}{2x} = \frac{a}{2} \\ \lim_{x \to 1^+} e^{x-1} + 2b = e^0 + 2b = 1 + 2b \end{array}\right\}$$

De aquí puedes deducir que $\frac{a}{2} = 1 + 2b$ ya que, para que la función sea continua en $x = 1$ los tres valores tienen que ser iguales.

Resolviendo la ecuación $\frac{a}{2} = 1 + 2b$ y sabiendo que $a = 2$

$$\frac{2}{2} = 1 + 2b \to 1 = 1 + 2b \to 0 = 2b \to b = 0$$