Teoría: cálculo de parámetros

Este apartado es el más importante de cara a la selectividad. Aquí tienes un esquema de cómo utilizar la información que te da el enunciado para hallar los valores de algunos parámetros.

La función pasa por el punto $\overset{(x,y)}{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})} \to \boldsymbol{f(A) = B}$

La función tiene un MAX, min o extremo relativo en… $\begin{cases} \to (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \begin{cases} \boldsymbol{f(A) = B} \\ \boldsymbol{f'(A) = 0} \end{cases} \\ \to \boldsymbol{x = A \to f'(A) = 0} \end{cases}$

La función tiene un Punto de Inflexión en … $\begin{cases} \to (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \begin{cases} \boldsymbol{f(A) = B} \\ \boldsymbol{f''(A) = 0} \end{cases} \\ \to \boldsymbol{x = A \to f''(A) = 0} \end{cases}$

<u>Para saber si una función no tiene máximo, mínimo, extremo relativo… $f''(x) = 0$</u>

La función tiene una recta tangente paralela a la función

$y = mx + n$ en … $\begin{cases} \to (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \begin{cases} \boldsymbol{f(A) = B} \\ \boldsymbol{f'(A) = m} \end{cases} \\ \to \boldsymbol{x = A \to f'(A) = m} \end{cases}$

Cálculo de parámetros

1. Halla a, b , c y d en la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que el punto $P(0,4)$ es un máximo y el punto $Q(2,0)$ un mínimo. ¿tiene algún extremo relativo más? Representa la función.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Siempre tienes que calcular la primera derivada ya que la vas a necesitar y la segunda derivada, solo cuando se hable de puntos de inflexión.

Con la información del enunciado tienes que crear las siguientes ecuaciones:

$$MAX\ (0,4) \to \begin{cases} f(0) = 4 \to a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 4 \to d = 4 \\ f'(0) = 0 \to 3a(0)^2 + 2b(0) + c \to c = 0 \end{cases}$$
$$\min(2,0) \to \begin{cases} f(2) = 0 \to a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d = 0 \to 8a + 4b = -4 \\ f'(2) = 0 \to 3a(2)^2 + 2b(2) + c = 0 \to 12a + 4b = 0 \end{cases}$$

Con la última información tienes que resolver el sistema para hallar el valor de a y b:

$$\begin{cases} 8a + 4b = -4 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases}$$
$$-4a \quad = -4 \to a = 1$$

Para terminar tienes que hallar el valor de $b \to 8 + 4b = -4 \to b = -3$

2. Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$. Hallar a y b de manera que la gráfica de la función tenga para $x = 1$ un punto de inflexión, y cuya recta tangente en ese punto forma un ángulo de $45\ grados\ (PENDIENTE;\ m = tan\,45^o = 1)$ con el eje OX.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$
$$f''(x) = 6x + 2a$$

Como habla de puntos de inflexión, haz los cálculos de la segunda derivada.

Con la información que tienes sacamos las siguientes conclusiones gracias al esquema que tienes en la página anterior.

$$P.I.en\ \ x = 1 \rightarrow f''(1) = 0 \rightarrow 6(1) + 2a = 0 \rightarrow a = -3$$
$$m = \tan 45 = 1\ en\ x = 1 \rightarrow f'(1) = 1 \rightarrow 3(1)^2 + 2a(1) + b = 1 \rightarrow 3 - 6 + b = 1 \rightarrow b = 4$$

3. Determina a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un máximo para $x = -4$, un mínimo, para $x = 0$ y tome el valor 1 para $x = 1$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

Los datos para crear las ecuaciones son los siguientes:

$$MAX\ en\ x = -4 \rightarrow f'(-4) = 0$$
$$\min en\ x = 0 \rightarrow f'(0) = 0$$
$$P(1{,}1) \rightarrow f(1) = 1$$

4. Determinar a, b, c, d y e, de modo que la curva $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, tenga un punto critico en (1,3) y un punto de inflexión con tangente de ecuación $y = 2x$ en el punto (0,0)

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

Ahora con la información que te proporciona el enunciado tienes que crear las ecuaciones, recuerda que un punto crítico es un lo mismo que hablar de un máximo o mínimo.

$$Punto\ critico\ (1{,}3) \rightarrow \begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$
$$P.I.en\ (0{,}0) \rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f''(0) = 0 \end{cases}$$
$$Tangente\ y = 2x\ en\ x = 0 \rightarrow f'(0) = 2$$

5. La función $f(x) = x^2 + ax + b$ pasa por el punto $A(0,4)$ y tiene un mínimo en el punto $B(2,0)$. Calcula mentalmente el valor de a y b.

$$f(x) = x^2 + ax + b$$
$$f'(x) = 2x + a$$

Información que te proporciona el enunciado:

$$A(0,4) \to f(0) = 4 \to (0)^2 + a(0) + b = 4 \to b = 4$$

$$\min B(2,0) \to \begin{cases} f(2) = 0 \to (2)^2 + a(2) + b = 0 \to 4 + 2a + 4 = 0 \to a = -4 \\ f'(2) = 0 \to 4 + a = 0 \to a = -4 \end{cases}$$

6. Halla a, b y c en $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4$ de modo que $f(x)$ tenga un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $\left(2, \frac{-10}{3}\right)$.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Información:

$$MAX\ en\ x = 1 \to f'(1) = 0$$

$$\min en \left(2, \frac{-10}{3}\right) \to \begin{cases} f(2) = -\frac{10}{3} \\ f'(2) = 0 \end{cases}$$

7. Dada la función $f(x) = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula los valores de a y b sabiendo que la función tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = 1$ y otro en $x = \frac{1}{2}$

$$f(x) = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$$

Con la información que tienes:

$$I.P.en\ x = 1 \to f''(1) = 0$$

$$I.P.en\ x = \frac{1}{2} \to f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Recuerda, cuando tienes un punto de inflexión es...
$\boldsymbol{x = A \to f''(A) = 0}$

8. Teniendo la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ calcula los valores de los parámetros para que la función pase por el punto $(-1,4)$, que la función tenga un máximo en $x = 1$, que la función en $x = -2$, tenga una recta tangente paralela a $y - 3x = 0$.

$$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$$

Con la información que el ejercicio te proporciona:

$$P(-1,4) \to f(-1) = 4 \to (-1)^3 + A(-1)^2 + B(-1) + C$$

$$MAX\ en\ x = 1 \rightarrow f'(1) = 0 \rightarrow 3(1)^2 + 2A(1) + B$$

La última información, te habla sobre recta tangente. Para hacerlo bien, tienes que despejar la variable y para, de esta forma, saber cuál es la pendiente:

$$y - 3x = 0 \rightarrow y = 3x$$

Por tanto, la pendiente $m = 3$

$$Recta\ tangente\ en\ x = -2\ paralela\ y = 3x \rightarrow f'(-2) = 3 \rightarrow 3(-2)^2 + 2A(-2) + B = 3$$

9. Calcular los valores de los coeficientes a, b, c y d en la ecuación de la función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabiendo que su gráfica pasa por el origen de coordenadas, pasa por el punto $\left(1, \frac{5}{6}\right)$ que tiene un máximo relativo en el punto de abscisas $x = 1$ y un mínimo relativo en el punto de abscisa 2.

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

Pasa por el origen de coordenadas:

$$(0,0) \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow\ a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 0 \rightarrow d = 0$$

Pasa por el punto $\left(1, \frac{5}{6}\right)$:

$$\left(1, \frac{5}{6}\right) \rightarrow f(1) = \frac{5}{6} \rightarrow\ a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = \frac{5}{6}$$

Máximo en $x = 1$

$$f'(1) = 0 \rightarrow 3a(1)^2 + 2b(1) + c = 0$$

Mínimo en $x = 2$

$$f'(2) = 0 \rightarrow 3a(2)^2 + 2b(2) + c = 0$$

10. Determina los valores de las constantes a, b, c y d para los cuales la gráfica de la función

$$f(x) = a\ sen\ x + bx^2 + cx + d$$

Tiene su tangente horizontal en el punto (0,4) y, además, su segunda derivada es

$$f''(x) = 3\ sen\ x - 10$$

$$f(x) = a\ sen\ x + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = a\cos x\ + 2bx + c$$

$$f''(x) = -a\ sen\ x + 2b$$

Tangente horizontal en (0,4) $\rightarrow \begin{cases} f(0) = 4 \rightarrow a \sin 0 + b(0)^2 + c(0) + d = 4 \\ f'(0) = 0 \rightarrow a\cos 0 + 2b(0) + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 4 \\ a + c = 0 \end{cases}$

Comparando la segunda derivada de la función con la segunda derivada teórica, serás capaz de sacar el valor de a y b:

$$f''(x) = -a\ sen\ x + 2b \qquad / \qquad f''(x) = 3\ sen\ x - 10$$

$$\begin{cases} -a = 3 \\ 2b = -10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -5 \end{cases}$$

Con la ecuación en amarillo $a + c = 0$

$$c = -a \rightarrow c = -(-3) \rightarrow c = 3$$