A2 Y B2 TEORIA

VECTORES, RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO:

RECTA

$$A(1,2,3)\ y\ \ B(0,1,-1)$$

Crea el vector con los puntos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,1,-1) - (1,2,3) = (-1,-1,-4)$$

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (1,2,3) - (0,1,-1) = (1,1,4)$$

Ecuaciones de la recta:

$$Vectorial \rightarrow (x,y,z) = (1,2,3) + t(1,1,4)$$

$$Parametrica \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 1t \\ y = 2 + 1t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Para saber el vector director de la recta: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1i + 1j + 4k$

Para saber un punto le damos un valor

$$Continua \rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$$

$$Intersección\ de\ dos\ planos \rightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

Para que dos rectas sean paralelas deben tener el mismo vector director o proporcional.

Algo importante para tener en cuenta:

Para encontrar el vector director de una recta representada de la siguiente manera:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{0} = z \rightarrow \overrightarrow{d_r} = (1,0,1)$$

Cuando tenemos la siguiente expresión, hallar el vector es:

$$\frac{mx}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{1}\rightarrow \ el\ vector\ puede\ ser\ \overrightarrow{d_r}=(\frac{1}{m},1,1)\ \ o\ \ \overrightarrow{d_r}=(1,m,m)$$

$$\frac{x}{\frac{1}{m}}=\frac{mx}{1}$$

POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO

Sus vectores directores son proporcionales

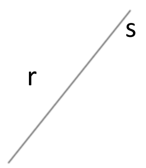
En este caso las rectas son paralelas o coincidentes (la misma recta). Es decir, se cumple:

$$\frac{d_1}{v_1}=\frac{d_2}{v_2}=\frac{d_3}{v_3}$$

Para diferenciar entre paralelas o coincidentes tenemos que coger el punto de la recta r y sustituirlo en la recta s.

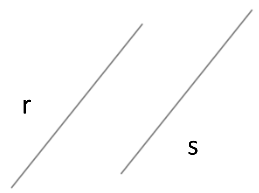
Coincidentes:

El punto de la recta r cumple las ecuaciones de la recta s.



Paralelas:

El punto de la recta r NO cumple las ecuaciones de la recta s.



Sus vectores directores NO son proporcionales

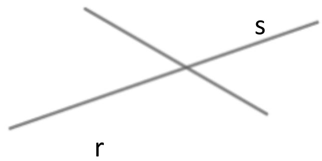
En este caso, los vectores al no ser proporcionales, las recta o se cruzan o se cortan.

Para diferenciar ambas opciones necesitamos los vectores directores de cada una de las rectas y crear un nuevo vector con los puntos de cada recta.

Entonces;

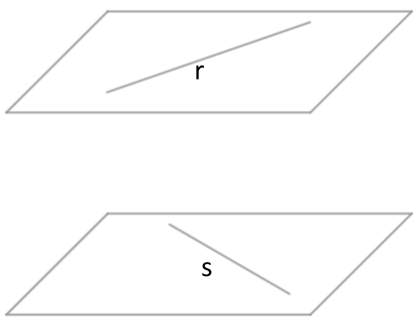
$$\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix}$$

Si el determinante anterior es igual a cero: las rectas se cortan en un punto. Para hallar dicho punto de corte tenemos que igualar ambas rectas teniendo en cuenta que las rectas deben de estar en paramétricas.



$$det(A) = 0$$

Si el determinante anterior es distinto de cero entonces ambas rectas se cruzan en el espacio.



$$det(A) \neq 0$$

PLANO

Necesitamos por lo menos tres puntos, con esos tres puntos calculamos dos vectores y escribimos las ecuaciones: A, B y C puedo calcular: $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$

Ecuación vectorial

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(d_1, d_2, d_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

$$\underset{\text{Punto}}{\downarrow} \qquad \underset{\text{Vector}}{\downarrow} \qquad \underset{\text{Vector}}{\downarrow}$$

Ecuación paramétrica

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda d_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda d_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda d_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Ecuación general o implícita

Para preparar esta ecuación del plano tenemos dos procedimientos dependiendo de la información:

Primer procedimiento

Cuando tenemos dos vectores y un punto que pertenecen al plano:

$$\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

resolviendo este determinante obtendremos la ecuación general del plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Segundo procedimiento

Cuando nos proporcionan el vector normal del plano y un punto:

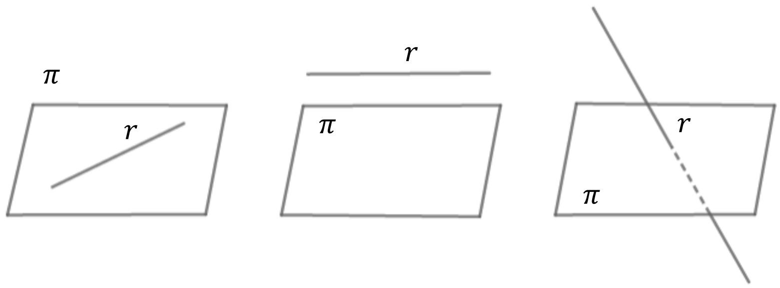
$$\vec{n} = (A, B, C)$$

$$P(x_0, y_0, z_0)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

POSICIÓN RELATIVA DE UNA RECTA Y UN PLANO

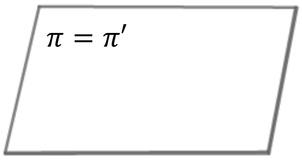


Obtenemos el vector director de la recta $\overrightarrow{d_r}$ y el vectro normal del plano $\vec{n}$:

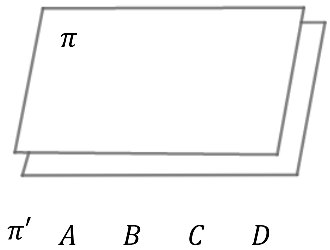
$$\begin{cases} \overrightarrow{d_r} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow \begin{matrix} Punto\ de\ r\ no\ pertene\ al\ plano \rightarrow Paralelas \\ Punto\ de\ r\ pertenece\ al\ plano \rightarrow\ Coincidentes \end{matrix} \\ \overrightarrow{d_r} \cdot \vec{n} \neq 0\ \rightarrow\ La\ recta\ y\ plano\ se\ cortan \end{cases}$$

POSICIÓN RELATIVA DE DOS PLANOS

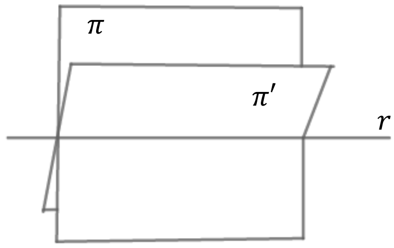
Dos planos pueden ser coincidentes, paralelos o secantes.



$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$



$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$



$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

$$\pi = Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\pi' = A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANOS

Dados los planos

$$\pi = Ax + By + Cz + D = 0$$

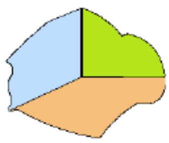
$$\pi' = A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

$$\pi'' = A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

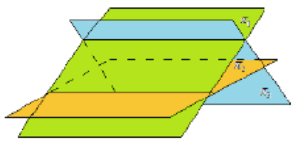
Podemos conocer su posición relativa estudiando el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

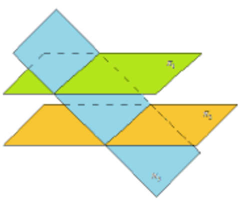
$Rango\ (M)$	$Rango\ (M^*)$	Posición
3	3	Planos secantes en un punto
2	3	Planos secantes dos a dos
		Dos planos paralelos y el tercero secante
2	2	Planos secantes y distintos
		Dos planos coincidentes y uno secante
1	2	Planos paralelos y distintos dos a dos
		Planos paralelos y dos coincidentes
1	1	Planos coincidentes



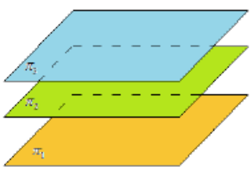
Tres planos secantes en un punto



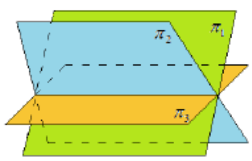
Tres planos secantes dos a dos según 3 rectas



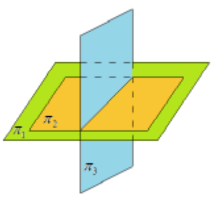
Dos planos paralelos y el tercero los corta según dos rectas



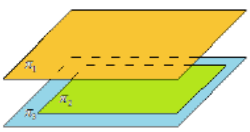
Los tres planos son paralelos



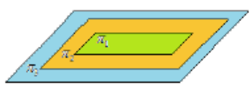
Tres planos distintos, secantes en una recta



Dos planos coincidentes y el tercero los corta según una recta



Dos planos coinciden y el otro es paralelo



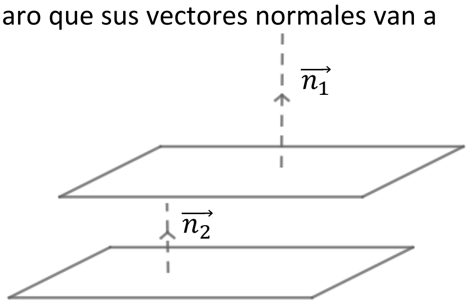
Los tres planos son coincidentes

Con el dominio de estos procedimientos seremos capaces de resolver cualquier problema.

Dos planos paralelos:

Si tenemos dos planos que son paralelos debemos tener claro que sus vectores normales van a ser iguales o proporcionales:

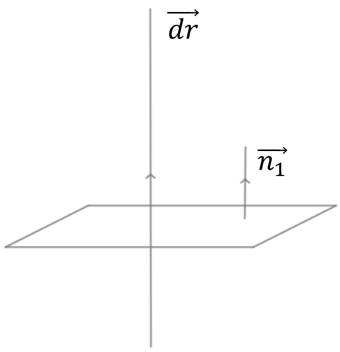
$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n_2}$$



Recta y plano perpendiculares:

Cuando tenemos una recta y un plano perpendiculares estamos trabajando con una situación en la que el vector normal del plano es igual al vector director de la recta:

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{dr} = (A, B, C)$$

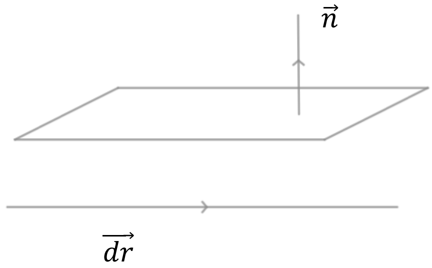


Con ese vector y un punto ya podríamos crear la ecuación del plano o de la recta, dependiendo de la información que nos den y de lo que nos pidan.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

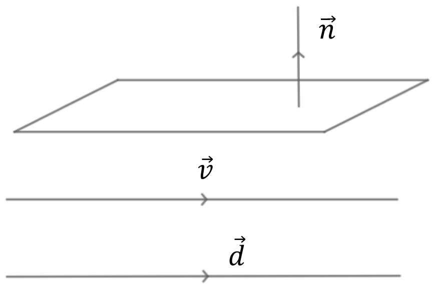
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

RECTA Y PLANO PARALELOS



Cuando tienes esta posición de la recta y el plano, tienes que asumir que $\vec{d}_r \cdot \vec{n} = 0$, ya que sus vectores forman un ángulo de noventa grados. Esta información suele ser de interés para resolver ejercicios.

Plano paralelo a dos rectas:

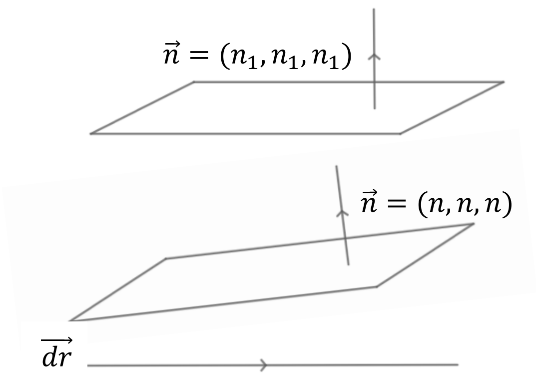


Cuando nos dicen que un plano es paralelo a dos rectas, el vector $\vec{n}$ del plano es perpendicular a los dos vectores directores de las rectas, entonces:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{n} = (A, B, C)$$

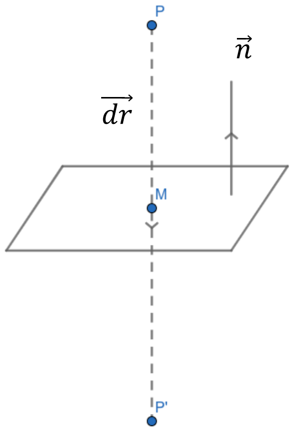
Recta paralela a dos planos:

Cuando nos dicen que una recta es paralela a dos planos, el vector $\vec{d}$ de la recta es perpendicular a los dos vectores normales de los planos, entonces:



$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ n & n & n \\ n_1 & n_1 & n_1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{d_r} = (x, y, z)$$

Punto simétrico respecto de un plano: $P\ y\ \pi$



Creamos la representación de la derecha, teniendo en cuenta lo siguiente:

$$\vec{n} = \overrightarrow{d_r} \ \rightarrow$$

$$el\ vector\ normal\ del\ plano\ y\ vector\ director\ de\ la\ recta\ son\ iguales$$

Observa que la recta (en discontinua) la vas a crear utilizando el vector normal del plano y el punto P

Cuando creas la recta con $P\ y\ \overrightarrow{d_r} = \vec{n}$, tienes que calcular el punto medio M. Para eso tienes que introducir en el plano las ecuaciones de la recta:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \qquad r: \begin{cases} x = \cdots \\ y = \cdots \\ z = \cdots \end{cases}$$

$$A(\ldots) + B(\ldots) + C(\ldots) + D = 0$$

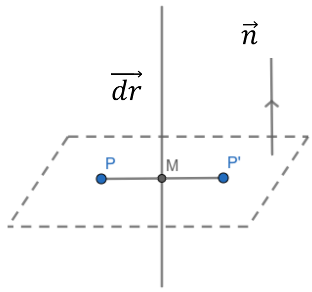
$$de\ esta\ forma\ calculas\ el\ valor\ de\ un\ parametro\ que\ sustituiremos\ en\ la\ ecuación\ de\ la\ recta.$$

$$y\ obtener\ las\ coordenas\ (x, y, z)\ del\ punto\ M$$

Para finalmente halla punto simétrico: $P' = 2M - P$

Punto simétrico respecto de una recta: $P\ y\ r$

Creamos la representación de la derecha, sabiendo que:



$$\vec{n} = \overrightarrow{d_r} \rightarrow$$

$$el\ vector\ normal\ del\ plano\ y\ vector\ director\ de\ la\ recta\ son\ iguales.$$

Observa que el plano (en discontinuo) lo vas a crear utilizando el vector director de la recta y el punto P que esta dentro del plano.

Cuando creas el plano con $P\ y\ \overrightarrow{d_r} = \vec{n}$, tienes que calcular el punto medio M. Para eso tienes que introducir en el plano las ecuaciones de la recta:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \qquad r: \begin{cases} x = \cdots \\ y = \cdots \\ z = \cdots \end{cases}$$

$$A(\dots) + B(\dots) + C(\dots) + D = 0$$

$$de\ esta\ forma\ calculas\ el\ valor\ de\ un\ parametro\ que\ sustituiremos\ en\ la\ ecuación\ de\ la\ recta.$$

$$y\ obtener\ las\ coordenas\ (x, y, z)\ del\ punto\ M$$

Para finalmente halla punto simétrico: $P' = 2M - P$

Entendiendo este procedimiento podrás ser capaz de determinar la distancia entre un punto y una recta o un punto y un plano de forma mucho mas sencilla que aplicando las formulas. El calculo se reduce al calcula de la distancia entre dos puntos.

La distancia entre dos puntos:

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

La distancia entre un plano y un punto:

$$d(\pi, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

La distancia entre dos planos paralelos:

$$d(\pi, \pi_1) = \left|\frac{D - D'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

ÁNGULO ENTRE ELEMENTOS

- Entre dos rectas:

$$cos\ \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

- Entre dos planos:

$$cos\ \alpha = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$$

- Entre recta y plano:

$$cos\ (90 - \alpha) = \frac{\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_1}}{|\overrightarrow{d_r}| \cdot |\overrightarrow{n_1}|}$$