A4 Y B4 TEORIA INTEGRALES Y AREAS

TABLA DE INTEGRALES

A continuación, veremos todas y cada una de las integrales inmediatas en su forma compuesta:

Forma compuesta:
$\int k\, dx = kx + c$
$\int f(x)^n \cdot f'(x)dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln\, \lvert f(x) \rvert + c$
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{ln\, a} + c$
$\int sen\, (f(x)) \cdot f'(x)\, dx = -cos\, f(x) + c$
$\int f'(x) \cdot cos\, (f(x))\, dx = sen\, f(x) + c$
$\int \frac{f'(x)}{cos^2 f(x)} dx = tg\, f(x) + c$
$\int \frac{f'(x)}{sen^2 f(x)} dx = -cotg\, f(x) + c$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}} dx = arc\, sen\, f(x) + c \quad = -arc\, cos\, f(x) + c$
$\int \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2} dx = arctg\, f(x) + c$

METODOS DE INTEGRACIÓN

METODO DE INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN

Este método consiste en descomponer la integral en una suma de integrales inmediatas. Conviene siempre descomponer el integrando todo lo posible para obtener integrales mas sencillas.

En otras ocasiones será aconsejable sumar y restar una constante o multiplicar y dividir por la constante para obtener integrales inmediatas.

METODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

La expresión de la fórmula de integración por partes es:

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

La regla mnemotécnica que podemos utilizar para aprender esta expresión es la siguiente:

Un Día Vi Un Viejo Vestido

Vamos a crear un esquema para determinar en cada momento a que llamamos u y a que llamamos dv, de esta elección dependerá que hagamos bien o mal la integral.

Llamaremos u a una función dependiendo del siguiente orden descendiente:

$$\begin{array}{ll} A & \rightarrow \ Funciones\ Arco \\ L & \rightarrow \ Funciones\ logaritmicas \\ P & \rightarrow \ Polinomios \\ E & \rightarrow \ Exponenciales \\ S & \rightarrow \ Seno, Coseno, Tangente \end{array}$$

En muchas ocasiones tendremos que aplicar este método de integración en mas de una ocasión.

METODO DE CAMBIO DE VARIABLE O SUSTITUCIÓN

Este método es uno de los mas amplios para el calculo de integrales, debido a la gran variedad de sustituciones que podemos hacer.

El éxito o fracaso en el calculo de la integral con este método, dependerá de la función elegida, ya que una sustitución mala nos llevará frecuentemente a integrales mas complicadas que la propuesta por el enunciado.

Integral	$\int a^x dx$	$\int e^x dx$	$\int x \ln x \, dx$	$\int x \, arc \ \ldots \ dx$	$\int (\sin x)^n (\cos x)^m$
Cambio recomendado	$t = a^x$	$t = e^x$	$t = \ln x$	$t = arc \ \ldots$	INTEGRALES TRIGONOMETRICAS

INTEGRALES TRIGONOMETRICAS

CASO 1.- POTENCIA DEL SENO O DEL COSENO ES IMPAR:

En este caso conservamos un factor seno o coseno y se pasan los restantes factores a coseno o a seno.

$$\int \boldsymbol{sen^5 x \, dx} = \int sen^4 x \ sen \, x \ dx$$

$$= \int (1 - cos^2 x)^2 \ sen \, x \, dx = \int (1 - 2\, cos^2 x + cos^4 x) \, sen \, x \, dx =$$

$$= \int sen \, x \, dx - 2 \int sen \, x \, cos^2 x \ dx + \int sen \, x \, cos^4 x \ dx =$$

$$= -\cos x - 2\frac{cos^3 x}{3} + \frac{cos^5 x}{5} + k$$

CASO 2.- POTENCIAS DEL SENO O DEL COSENO SON PARES Y POSITIVAS:

En este caso utilizamos repetidamente las siguientes identidades trigonométricas

$$sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad cos^2\, x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$sen\, x \cos x = \frac{1}{2}\, sen\, 2x$$

$$\int \boldsymbol{sen^4 x\, dx} = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1-2\cos 2x + cos^2 2x}{4} dx =$$

$$= \int \frac{1}{4} dx - \int \frac{2}{4} \cos 2x\, dx + \int \frac{1}{4} cos^2 2x\, dx =$$

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\frac{1}{2} sen\, 2x + \frac{1}{4}\int cos^2 2x\, dx =$$

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\frac{1}{2} sen\, 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} sen\, 2x + \frac{1}{4}\left[\int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\cos 4x}{2} dx\right] =$$

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} sen\, 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32} sen\, 4x + k$$

CASO 3.- PRODUCTO DE SENO, COSENO

Tenemos que realizar el mismo procedimiento que hemos utilizado cuando solo teníamos un seno o un coseno, pero en este caso estamos trabajando con un producto de seno y coseno. Priorizamos siempre los exponentes impares para realizar el cambio.

$$\int \boldsymbol{sen^4 x\, cos^3 x\;\, dx}$$

$$\int sen^4 x\, cos^2 x \cos x\, dx = \int sen^4 x\;\, (1 - sen^2\, x) \cos x\, dx$$

$$\int \cos x\;\, (sen^4 - sen^6\, x\,)\;\, dx = \int sen^4\, x \cos x\, dx - \int \cos x\;\, sen^6 x\, dx =$$

$$\frac{sen^5 x}{5} - \frac{sen^{\,7} x}{7} + k$$

$$\int \boldsymbol{sen^2 x \cos^2 x \, dx} =$$

$$\int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx =$$

$$\int \frac{1-cos^2 2x}{4} dx = \int \frac{1}{4} \, dx - \int \frac{cos^2 2x}{4} dx = \int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx =$$

$$\int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} sen\, 4x + k$$

INTEGRAL DE FUNCIÓN RACIONALES (RESUMEN)

Cuando tengamos una integral de una función racional tenemos que seguir el siguiente procedimiento:

- ¿Arriba tengo la derivada o puedo tener la derivada de los de abajo?
  - Si → $Estamos\ trabajando\ con\ logaritmo\ neperiano.$
- ¿El grado de lo de arriba es mas grande o igual al grado de lo de abajo?
  - Si → $Hacemos\ la\ división\ de\ los\ polinomios.\ \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int Z(x)\,dx + \int \frac{H(x)}{Q(x)} dx$
- ¿El grado de arriba es mas pequeño que el grado de abajo?
  - Si → $Tenemos\ que\ igualar\ a\ cero\ la\ parte\ de\ abajo\ Q(x) = 0.$
    - Tiene raíces reales entonces aplicamos uno de los tres procedimientos
    - No tiene raíces reales, estamos trabajando con arco tangente.

GRADO DE $\boldsymbol{P(x)}$ ≥ GRADO $\boldsymbol{Q(x)}$

En este caso lo que vamos a hacer es la división entre los polinomios:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & P_1(x) \end{array}$$

Por tanto, la nueva expresión será:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int P_1\,(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

si $R(x) = 0$, la división es exacta y por tanto el calculo de la integral se reduce simplemente a calcular la integral de $P_1(x)$.

GRADO DE $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) <$ GRADO $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$

Dependiendo de cómo sean las raíces del denominador estaremos ante casos diferentes:

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES SOLO CON RAICES SIMPLES EN EL DENOMINADOR

Creo que viendo un ejemplo entenderéis de forma mas rápida como se resuelven este tipo de integrales:

$$\int \frac{4x^2+8x+6}{x^3+2x^2-x-2}dx$$

Lo primero que tenemos que hacer, una vez comprobado que el grado del denominador es superior al grado del denominador, descomponer el denominador para calcular sus raíces, es decir,

$$x^3+2x^2-x-2=0$$

Si aplicamos Ruffini en este polinomio obtendremos que:

$$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$$

Ahora como hemos obtenido 3 raíces diferentes:

$$\frac{4x^2+8x+6}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+2)}$$

Ahora expresamos los dos miembros de la igualdad con el mismo denominador:

$$\frac{4x^2+8x+6}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{A(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x+2)}+\frac{B(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)}+\frac{C(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{4x^2+8x+6}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

Ahora tenemos que calcular los valores de A, B y C sustituyendo la incógnita x por los valores de las raíces que hemos obtenido anteriormente:

$$4x^2+8x+6=A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+1)$$

- Si $x=1\rightarrow P(1)=18=A\cdot 2\cdot 3\rightarrow 18=6A\rightarrow A=3$
- Si $x=-1\rightarrow P(-1)=2=B\cdot(-2)\cdot 1\rightarrow 2=-2B\rightarrow B=-1$
- Si $x=-2\rightarrow P(-2)=-6=C\cdot(-3)\cdot(-1)\rightarrow 6=3C\rightarrow C=2$

Ahora lo que tenemos que hacer es volver a la expresión inicial y sustituir los valores de $A, B\ y\ C$ para terminar calculando las diferentes integrales:

$$\frac{4x^2+8x+6}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+2)}$$

$$A=3\ ;\ B=-1\ ;\ C=2$$

$$\int\frac{4x^2+8x+6}{x^3+2x^2-x-2}\,dx=\int\frac{A}{(x-1)}dx+\int\frac{B}{(x+1)}dx\ +\int\frac{C}{(x+2)}dx$$

$$\int\frac{4x^2+8x+6}{x^3+2x^2-x-2}\,dx=\int\frac{3}{(x-1)}dx+\int\frac{-1}{(x+1)}dx\ +\int\frac{2}{(x+2)}dx$$

$$3\int\frac{1}{(x-1)}dx-\int\frac{1}{(x+1)}dx\ +2\int\frac{1}{(x+2)}dx$$

$$3\,ln|x-1|-ln\,|x+1|+2\,ln|x+2|+C$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACONALES CON RAICES MÚLTIPLES EN EL DENOMINADOR

Como en el caso anterior vamos a ver un ejemplo para explicar el procedimiento ante un caso como este:

$$\int \frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1}dx$$

Lo primero que tenemos que hacer es calcular las raíces del denominador:

$$x^3-3x^2+3x-1=0$$

Si realizamos la descomposición de este polinomio de grado 3 obtendremos que;

$$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$$

Por lo que podemos comprobar tenemos una raíz de multiplicidad 3. La forma de actuar será la siguiente:

$$\frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}$$

Ahora lo que tenemos que hacer es expresar los dos miembros de la igualdad con el mismo denominador:

$$\frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1}=\frac{A(x-1)^2}{(x-1)(x-1)^2}+\frac{B(x-1)}{(x-1)^2(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^3}$$

$$2x-1=A(x-1)^2+B(x-1)+C$$

Ahora, como en el caso anterior, tenemos que sustituir la incógnita x por los valores de las raíces, en este caso $x=1$.

- $x = 1 \rightarrow P(1) = 1 = C$

Como ya no tenemos mas raíces para sustituir, tenemos que elegir dos valores mas de x aleatoriamente. En este caso $x = 0 \; y \; x = -1$.

- $x = 0 \rightarrow P(0) = -1 = -A - B + C$
- $x = -1 \rightarrow P(-1) = -3 = 4A - 2B + C$

Como $C = 1$, entonces tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para resolverlo.

$$\begin{cases} -1 = -A - B + 1 \\ -3 = 4A - 2B + 1 \end{cases} \rightarrow A = 0 \; y \; B = 2$$

Ahora sustituimos los valores de $A, B \; y \; C$ en la ecuación del principio para resolver la integral:

$$\frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$$A = 0 \;\; ; \;\; B = 2 \;\; ; \;\; C = 1$$

$$\frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{0}{(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$$

$$\int \frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1} dx = \int \frac{0}{(x-1)} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{(x-1)^3} dx$$

Finalmente damos solución a la integral:

$$2\int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{(x-1)^3} dx = -\frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES CON RAÍCES MÚLTIPLES Y SIMPLES EN EL DENOMINADOR

En este apartado estamos mezclando los dos apartados anteriores, es decir, tendremos tanto raíces simples como raíces múltiples.

Veamos un ejemplo para explicar el procedimiento:

$$\int \frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}dx$$

Factorizamos el denominador $x^3-x^2-x+1=0 \rightarrow (x+1)(x-1)^2=0$

Por tanto, tenemos una raíz simple y una raíz múltiple:

$$\frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

Ahora lo que haremos será expresar en forma de dos fracciones con igual denominador.

$$\frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

El siguiente paso es sustituir x por los valores obtenidos como raíces:

- $x=1 \rightarrow 3(1)+7=C\cdot 2 \rightarrow 10=2C \rightarrow C=5$
- $x=-1 \rightarrow 3(-1)+7=A\cdot(-2)^2 \rightarrow 4A=4 \rightarrow A=1$

Como ya hemos sustituido los dos valores obtenidos como raíces y todavía tenemos una variable por despejar, damos un valor a x aleatorio:

- $x=0 \rightarrow 3(0)+7=A-B+C \rightarrow B=A+C-7 \rightarrow B=-1$

Para terminar, sustituimos los valores de $A, B\ y\ C$ para terminar hallando el valor de la integral:

$$\frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$A=1\ ;\ B=-1\ ;\ C=5$$

$$\int\frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}dx=\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{-1}{x-1}dx+\int\frac{5}{(x-1)^2}dx$$

$$ln\,|x+1|-ln\,|x-1|-\frac{5}{x-1}+C$$

INTEGRALES RACIONALES EN LAS QUE EL DENOMINADOR NO TIENE RAICES REALES→ARCOTANGENTE

Cuando tengamos una división entre dos funciones a la hora de calcular y las raíces del denominador no sean reales, tendremos que aplicar la integral del arco tangente.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)^2+1}dx = arctg\, f(x) + C$$

La finalidad en estos casos es llegar a obtener una expresión como la anterior para hacer el arco tangente de la función.

Veamos un ejemplo practica para definir cuales son los pasos que debemos de seguir:

$$\int \frac{2}{x^2+4}dx$$

Esta integral que tenemos es del tipo arco tangente, lo puedes comprobar siguiendo todos los pasos que te he explicado anteriormente.

1. El primer paso que tenemos que dar, es lograr un uno en lugar donde tenemos el cuatro, para eso dividimos a todo el denominador entre cuatro. Realizar esta operación requiere de poner uno entre cuatro fuera de la integral para no modificar el resultado.

$$\int \frac{2}{x^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{2}{\frac{x^2+4}{4}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{2}{\frac{x^2}{4}+1}dx$$

2. El segundo paso es lograr en lugar de $\frac{x^2}{4}$ tener una expresión entera elevada al cuadrado, tal y como aparece en la expresión de la integral de la arcotangente $f(x)^2$.

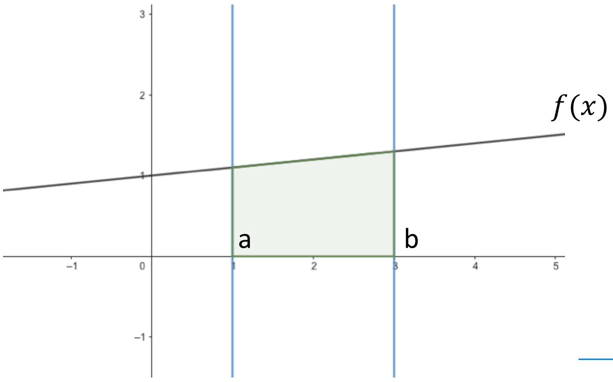
$$\frac{1}{4}\int \frac{2}{\frac{x^2}{4}+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx$$

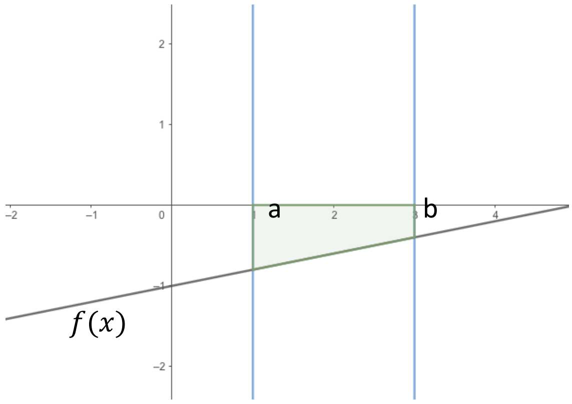
3. Espero que lo estés entendiendo, ya queda poco. Ahora el ultimo paso es tener en el numerador la derivada de la función que esta elevada al cuadrado. En este caso la derivada de $\frac{x}{2}$ es muy sencilla de calcular: $\frac{1}{2}$, por tanto, en el numerador tenemos que colocar un medio y fuera de la integral tenemos que poner un dos multiplicando para no modificar el resultado de la integral, pero antes vamos a quitar el dos que ya tenemos en el numerado puesto que nos molesta:

$$\frac{1}{4}\int \frac{2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{2}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{2}{4}\cdot 2\cdot \int \frac{1/2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \arctan\frac{x}{2} + C$$

INTEGRALES DEFINIDAS:

Nos planteamos el problema de hallar el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$.





$$\int_a^b f(x)dx = F(x)_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)_a^b = |F(b) - F(a)|$$

Fíjate que cuando la función esta por debajo del eje OX debemos tener en cuenta en valor absoluto.

En otros casos nos planteamos calcular el área encerrada por dos funciones:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\ dx =$$

$$[F(b) - F(a)] + [|F(c) - F(b)|]$$

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx + \int_b^c g(x) - f(x)\ dx =$$

$R(x) = f(x) - g(x)$

$$\int_a^b R(x)\,dx + \int_b^c S(x)\ dx =$$

$S(x) = g(x) - f(x)$