A3 Y B3

JUNIO 2020 A3.- Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, obtener los valores de los parámetros para que su gráfica pase por el punto $(0{,}2)$ y tenga un extremo en $(1, -1)$. ¿tienes la función mas extremos?

JUNIO 2020 B3.- Sea $f(x) = x^2 + 9$, y P el punto exterior a s u grafica de coordenadas $P = (0{,}0)$. Calcular razonadamente la o las rectas tangentes a la gráfica de la función que pasan por el punto P.

JULIO 2020 A3.- Sea la función definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & x > 2 \end{cases}$$

Calcular a y b, sabiendo que la función es derivable en toda la recta real.

JULIO 2020 B3.- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^2 e^{2x}$. Encontrar sus extremos.

JULIO 2019 A3.- Dada la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$

- $\Rightarrow$ Obtener los valores de A, B y C para que su gráfica contenga al punto $P(0{,}1)$ y para que la función tenga un mínimo local en el punto $Q(2{,}0)$.
- $\Rightarrow$ ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos locales?

JULIO 2019 B3.- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Representa la función.

JUNIO 2019 A3.- Dada la función $f(x) = x^2 + 64$ y el punto exterior a su gráfica $P(6{,}0)$, encontrar la recta o rectas tangentes a la función que pasen por el punto P.

JUNIO 2019 B3.- Sea la función $f(x) = x^2 e^{-4x}$ Calcula la primera y la segunda derivada de la función. Hallar los máximos y los mínimos.

JUNIO 2018 A3.- Sea la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & x \leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & x > 1 \end{cases}$$

Estudiar su continuidad y su derivabilidad en función del parámetro a.

JUNIO 2018 B3.- Dada la función $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-4}$ se pide

1. Hallar las asíntotas de la función.
2. Hallar los intervalos donde es creciente y donde es decreciente.
3. ¿Tiene extremos la función?, En caso afirmativo ¿en que puntos?

JULIO 2018 A3.- Dada la función $f(x) = x^2e^{-x}$ estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de máximos, mínimos y asíntotas.

JULIO 2018 B3.- De la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ se sabe que su gráfica pasa por el punto $(1,0)$ y tiene un extremo relativo en $x = 0$ de valor 1.

1. Hallar A, B y C
2. ¿El extremo situado en el punto $x = 0$ *es un maximo o es minimo*?

JULIO 2018 A5.- Calcular el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 8.

JUNIO 2017 A3.- Calcular el valor de los parámetros c y d sabiendo que la gráfica de la función definida por $f(x) = 2x^3 - x^2 + cx + d$, tiene como recta tangente en el punto $P(1,-2)$ la recta de ecuación $y = 5x - 7$

JUNIO 2017 B3.- Determinar los valores a y b para que la función f definida de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + a & x \leq 2 \\ -x^2 + bx & x > 2 \end{cases}$$

Sea derivable en todo su dominio.

JULIO 2017 A3.-Sabemos que la recta $y = 2x - 10$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx - 1$ en el punto $P(1, -8)$

- Calcula los valores de A y B
- Calcular los puntos de corte de la función con la recta de ecuación $y = -15x - 1$

JULIO 2017 B3.- Dada la función $y = \frac{x^3+4}{x^2}$

Razonar la existencia de máximos y mínimos de la función. Si existen hallarlos.

¿Para que intervalos es creciente la función?

Hallar todas las asíntotas de la función

JUNIO 2016 A3.- Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

Y calcula cuales son sus máximos y sus mínimos.

JUNIO 2016 B3.- Dada la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + C$

Calcula los valores de los parámetros A, B y C de manera que la función satisfaga las siguientes propiedades:

Pasa por el punto $(0,0)$

Tenga un máximo local en el punto $(1,2)$

JULIO 2016 A3.- Calcular los valores A, B, C y D para que la función

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Tenga extremos relativos en $(0,0)\ y\ en\ (2,2)$

JULIO 2016 B3.- Dada la función polinómica

$$P(x) = \frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2}$$

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Obtener sus máximos y sus mínimos.

¿Existe algún valor de x tal que $P(x) < 0$?

JULIO 2015 A3.- Para adornar un mural queremos construir un marco de madera rectangular que encierre una superficie de cinco metros cuadrados. Sabemos que el coste de cada centímetro del marco en los lados horizontales es de 1,5€, mientras que en los lados verticales es de 2,7€. Determinar las dimensiones que hemos de elegir para que el marco nos resulte lo mas barato posible.

JULIO 2015 B3.- Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & x > 2 \end{cases}$$

Hallar los valores de a y b sabiendo que la función es derivable en toda la recta real

Calcular la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisas $x = 1$

JUNIO 2015 A3.- Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

- Determinar los coeficientes de a, b y c sabiendo que tiene un extremo relativo en $x = -1 \; y \; en \; x = 1$ y que además pasa por el origen de coordenadas.
- Estudiar la naturaleza de ambos extremos relativos y realizar un dibujo aproximado del polinomio.

JUNIO 2015 B3.- Sea $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$

Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función

Calcula los extremos relativos de la función.

JUNIO 2014 A3.- Sea la función $f(x) = ax^3 + bx + c$.

- Obtener los valores de a, b y c para que pase por el origen de coordenadas y tenga un mínimo en el punto $(1, -1)$
- ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos?

JUNIO 2014 B3.-Se sabe que la función F es derivable en todos los puntos, y que esta definida en el intervalo desde menos infinito hasta cero incluido por la formula:

$$F(x) = 1 + 2x + Ax^2$$

Y en el intervalo desde cero hasta infinito por la formula

$$F(x) = B + Ax$$

- Encontrar los valores de A y de B para que se verifiquen las condiciones anteriores.
- Representa la función

JULIO 2014 A3.-

- Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos.
- Trazar un dibujo aproximado de la gráfica de la función y contestar de forma razonada a la siguiente pregunta: ¿Cuántos valores de x satisfacen $f(x) = 0$

JULIO 2014 B3.- Se sabe que la suma de los cuadrados de dos números positivos A y B vale 32. Calcular dichos números para que su producto sea máximo.

JULIO 2013 A3.- Una franquicia de tiendas de electrónica ha estimado que sus beneficios semanales dependen del numero de tiendas n que tiene en funcionamiento de acuerdo con la expresión:

$$B(n) = -4n(2n^2 - 15n + 24)$$

Determinar razonadamente:

El numero de tiendas que debe tener para maximizar sus beneficios semanales

El valor de dichos beneficios máximos

JULIO 2013 B3.- Dada la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$

- Hallar los valores de los parámetros para que la función tenga un extremo en $x = 0\ y\ otro\ en\ x = 2$¿Son únicos dichos parámetros?
- Determinar de que tipo de extremo se trata (¿máximo o mínimo?)
- Representar la función en el caso $C = 0$

JUNIO 2013 A3.- Sea la función $f(x) = \frac{2}{x^2-5x+6}$. Obtener razonadamente:

El dominio y las asíntotas de la función

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

Realizar un dibujo aproximado de la gráfica de dicha función

JUNIO 2013 B3.- Se divide un segmento de longitud 200 cm en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

JULIO 2012 A3.- Dada la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$

- Hallar los valores de los parámetros para que la grafica pase por el punto $(1,1)$, tenga un maximo en $x = -4$ y una recta tangente horizontal para $x = 0$.
- Determinar los extremos relativos, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y dibujar la grafica de la función.

JULIO 2012 B3.- Una tienda vende aceite a 2 euros el litro. Al vender x litros los costes de todo tipo expresados en euros son $0{,}5x + Cx^2$. Se sabe que el beneficio máximo se obtiene vendiendo 750 litros. Encontrar el valor de C y el beneficio máximo obtenido.

JUNIO 2012 A3.- Dada la función $f(x) = Ax^3 + Bx$, sabemos que pasa por el punto $P(1,1)$ y además que en ese punto tiene tangente paralela a la recta $y = -3x$.

- De acuerdo con dichas condiciones calcular los valores de A y B.
- Determinar los extremos relativos, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y por último realizar un dibujo de la función.

JUNIO 2012 B3.- Una empresa fabrica cajas de cartón sin tapa, de volumen 4000 centímetros cúbicos. Se sabe que las cajas tienen su base cuadrada.

Hallar la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de cartón empleado en fabricarlas sea mínima.

JULIO 2011 A3.- Estudiar las asíntotas y los extremos de la función dada por

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Y trazar un bosquejo de la gráfica.

JULIO 2011 B3.- De una función se sabe que es derivable en toda la recta, que es creciente también en toda la recta y que en todos los puntos satisface la desigualdad $f(x) > 0$.

Con estos datos ¿se puede demostrar que $h(x) = e^{f(x)} - f(x)$ es creciente en toda la recta?

JUNIO 2011 A3.- Sea la función $f(x) = x^2e^{-2x}$

Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Estudiar sus máximos y sus mínimos y trazar un boceto de la gráfica.

JUNIO 2011 B3.- Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

Encontrar los valores de los parámetros de forma que la gráfica contenga al punto $(0,1)$ y que las rectas tangentes a la función en los puntos $x = 0\ y\ x = 1$ sean ambas paralelas a la recta $y = 3x + 5$

JULIO 2010 A3.- un comerciante vende café a 2 euros y 75 céntimos el kilo. El comerciante tiene dos tipos de gastos, el transporte de la mercancía y un impuesto de hacienda. Por cada kilo que vende el transporte le supone un gasto de 25 céntimos de euro. Para calcular los euros que deben de pagarse a hacienda por el impuesto hay que dividir el cuadrado de la cantidad de kilos que se venden entre 1200.

Con estos datos calcular el numero de kilos que debe vender el comerciante para que el beneficio se máximo y calcular dicho beneficio máximo.

JULIO 2010 B3.- Calcular el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ en que la tangente en dicho punto es paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes. Hacer una representación grafica y calcular dicha recta tangente.

JUNIO 2010 A3.- Estudiar los máximos y los mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - 12x - 8$. Representa la gráfica de la función.

JUNIO 2010 B3.- Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$f(x) = 4x^3 - 2x + 1$$

Que son paralelas a la recta $y = 10x + 2$.Estudiar los máximos y los mínimos de la función.

SOLUCIONES

JUNIO 2020 A3.- Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, obtener los valores de los parámetros para que su gráfica pase por el punto $(0{,}2)$ y tenga un extremo en $(1,-1)$. ¿tienes la función mas extremos?

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$P(0{,}2) \to f(0) = 2 \to c = 2$$

$$Extremo(1,-1) \to \begin{cases} f(1) = -1 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a(1)^3 + b(1)^2 + c = -1 \\ 3a(1)^2 + 2b(1) = 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} a + b + 2 = -1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a + b = -3 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \to a = -3 - b$$

$$3(-3 - b) + 2b = 0 \to -9 - 3b + 2b = 0 \to b = -9$$

Sabiendo que $b = -9 \to a = -3 - (-9) \to a = 6$

La función con los parámetros calculados es $f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 2$

Ahora vamos a comprobar si esta función tiene algún extremo relativo mas:

$$f'(x) = 18x^2 - 18x \to f'(x) = 0 \to 18x^2 - 18x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Para comprobar que clase de extremos son los valores que hemos obtenido de igualar a cero la primera derivada, vamos a realizarlo con la segunda derivada.

$$f''(x) = 36x - 18$$

$$f''(0) = -18 \to x = 0 \; es \; un \; maximo \; ya \; que \; f''(0) < 0$$

$$f''(0) = 18 \to x = 1 \; es \; un \; minimo \; ya \; que \; f''(0) > 0$$

JUNIO 2020 B3.- Sea $f(x) = x^2 + 9$, y P el punto exterior a su grafica de coordenadas $P = (0,0)$. Calcular razonadamente la o las rectas tangentes a la gráfica de la función que pasan por el punto P.

La idea, para resolver este ejercicio, es aplicar el procedimiento del TIPO 3 que tienes en los apuntes teóricos en la web c2academia.com

Recuerda que la derivada es la pendiente de la recta tangente y que a su vez la pendiente la puedes calcular teniendo dos puntos de la recta tangente.

Por lo tanto,

$$f'(x) = 2x$$

La pendiente m, la puedes calcular mediante la siguiente ecuación:

$$m = \frac{y_0 - y}{x_0 - x}$$

Uno de los puntos de la recta tangente ya lo tienes $\underline{P = (0,0)}$, el otro punto lo sacaremos teniendo en cuenta el siguiente concepto. Cualquier punto de la curva tiene que cumplir su ecuación, es decir, $y = x^2 + 9$, por tanto, $\underline{(x, x^2 + 9)}$ esta expresión es la de cualquier punto que este sobre la curva, casualidad que el punto de tangencia entre la curva y la recta tangente también debe de cumplir con esta expresión, por tanto, aquí tenemos el otro punto que necesitas para calcular la pendiente.

$$m = \frac{x^2 + 9 - 0}{x - 0} = \frac{x^2 + 9}{x}$$

Como la pendiente y la derivada son cosas iguales:

$$\frac{x^2 + 9}{x} = 2x \rightarrow x^2 + 9 = 2x^2 \rightarrow x = \pm 3$$

Tenemos dos puntos de tangencia, por tanto, deberemos de calcular dos rectas tangentes:

$$En\ x = 3 \rightarrow y = f(3) + f'(3)(x - 3)$$

$$En\ x = -3 \rightarrow y = f(-3) + f'(-3)(x + 3)$$

JULIO 2020 A3.- Sea la función definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & x > 2 \end{cases}$$

Calcular a y b, sabiendo que la función es derivable en toda la recta real.

Para que una función sea derivable primero tiene que cumplir que sea continua, por tanto, primero debemos de comprobar la continuidad de la función.

Antes de nada, debes analizar cada función por separado, en este caso, al tratarse de funciones polinómicas, están definidas para toda la recta. El único punto problemático es $x = 2$

Continuidad en $x = 2$

$$f(2) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \end{cases} \rightarrow$$

$$a(2)^2 + 3(2) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} x^2 - bx - 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} ax^2 + 3x \end{cases} \rightarrow$$

$$4a + 6 = \begin{cases} -2b \\ 4a + 6 \end{cases} \rightarrow La\ funcion\ para\ que\ sea\ continua \rightarrow 4a + 6 = -2b$$

Ahora vamos con la derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & x < 2 \\ 2x - b & x > 2 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable

$$f'(2^+) = f'(2^-)$$

$$4 - b = 4a + 3$$

Con las dos ecuaciones que tenemos realizamos un sistema y de esta forma obtendremos los valores de a y b para que la función sea derivable.

$$\begin{cases} 4a + 6 = -2b \\ 4 - b = 4a + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -6 \\ -4a - b = -1 \end{cases} \rightarrow Mediante\ el\ metodo\ de\ reducción:$$

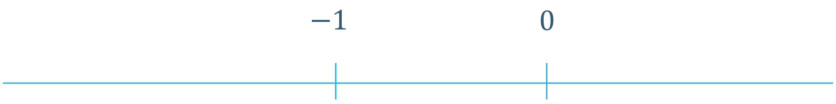
$$b = -7 \rightarrow sabiendo\ el\ valor\ de\ b \rightarrow a = 2$$

JULIO 2020 B3.- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^2e^{2x}$. Encontrar sus extremos.

$$f'(x) = 2xe^{2x} + x^2e^{2x}2 \rightarrow f'(x) = e^{2x}(2x + 2x^2)$$

Ahora debes de igualar a cero la primera derivada para saber los puntos que serán los máximos y mínimos (extremos) de la función.

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^{2x}(2x + 2x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} e^{2x} = 0 \rightarrow No\ tiene\ solución \\ (2x + 2x^2) = 0 \rightarrow 2x(1 + x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$



$$f'(-2) > 0 \rightarrow intervalo\ creciente\ (-\infty, -1)$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \rightarrow intervalo\ decreciente\ (-1,0)$$

$$f'(1) > 0 \rightarrow intervalo\ creciente\ (0, \infty)$$

Teniendo en cuenta el crecimiento y decrecimiento de la función, podemos afirmar lo siguiente:

$$x = -1 \rightarrow MAXIMO$$
$$x = 0 \rightarrow MINIMO$$

JULIO 2019 A3.- Dada la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$

- ⇒ Obtener los valores de A, B y C para que su gráfica contenga al punto $P(0,1)$ y para que la función tenga un mínimo local en el punto $Q(2,0)$.
- ⇒ ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos locales?

Lo primero vamos a calcular la derivada de la función ya que la vamos a necesitar:

$$f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$$

Analizando la información que nos da el enunciado:

$$P(0,1) \to f(0) = 1 \to C = 1$$

$$Q(2,0) \to \begin{cases} f(2) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 8 + 4A + 2B + C = 0 \\ 12 + 4A + B = 0 \end{cases}$$

Sabiendo que $C = 1 \to \begin{cases} 4A + 2B = -9 \\ 4A + B = -12 \end{cases} \to Utilizando\ el\ metodo\ de\ reduccion$:

$$B = 3, y\ sabiendo\ este\ valor, podemos\ saber\ el\ valor\ de\ A \to A = \frac{-15}{4}$$

Para saber si la función que hemos obtenido tiene otros máximos o mínimos locales, tenemos que sustituir los parámetros en la primera derivada e igualarla a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 2\frac{15}{4}x + 3$$

$$f'(x) = 0 \to x = \frac{+\frac{15}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-15}{2}\right)^2 - 4(3)(3)}}{6} = \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Podemos afirmar, utilizando la segunda derivada, que estos valores se corresponden con un máximo y un mínimo y que, por tanto, la función tiene dos extremos relativos.

JULIO 2019 B3.- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Representa la función.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow x(3x+6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$f'(-3) > 0 \rightarrow intervalo\ creciente\ (-\infty, -2)$$

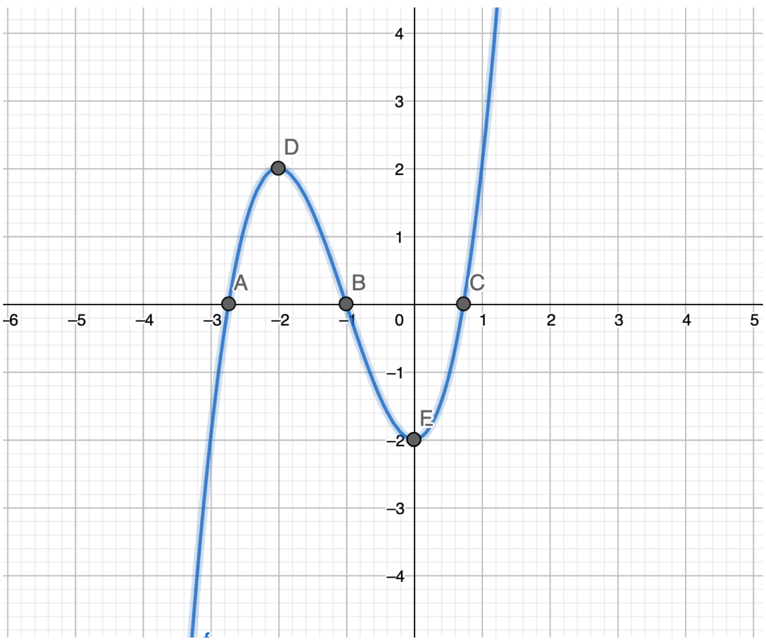
$$f'(-1) < 0 \rightarrow intervalo\ decreciente\ (-2,0)$$

$$f'(1) > 0 \rightarrow intervalo\ creciente\ (0, \infty)$$

Teniendo en cuenta el crecimiento y decrecimiento de la función, podemos afirmar lo siguiente:

$$\begin{matrix} x = -2 \rightarrow MAXIMO \\ x = 0 \rightarrow MINIMO \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} y = f(-2) \\ y = f(0) \end{cases}$$

Para representar la función únicamente necesitaríamos los puntos de corte de la función con los ejes.



JUNIO 2019 A3.- Dada la función $f(x) = x^2 + 64$ y el punto exterior a su gráfica $P(6,0)$, encontrar la recta o rectas tangentes a la función que pasen por el punto P.

Para realizar este ejercicio tienes que tener en cuenta lo siguiente:

$$f'(x) = m \rightarrow f'(x) = \frac{y_0 - y}{x_0 - x}$$

Para eso lo primero que vamos a hacer es calcular la primera derivada de la función:

$$f'(x) = 2x$$

Ahora tienes que entender que para calcular la pendiente necesitas dos puntos, uno ya nos lo da el enunciado, el otro vamos a coger el punto de tangente, que como pertenece también a la curva $f(x) = x^2 + 64$ tiene que cumplir su ecuación, es decir, cualquier punto de esta curva tendrá la siguiente expresión:

$$(x, x^2 + 64)$$

Por tanto, con $P(6,0) y\ el\ punto\ de\ tangencia: T(x, x^2 + 64)$ creamos la pendiente m:

$$\frac{y_0 - y}{x_0 - x} = \frac{x^2 - 64 - 0}{x - 6} = \frac{x^2 + 64}{x - 6}$$

$$2x = \frac{x^2 + 64}{x - 6} \rightarrow 2x(x - 6) = x^2 + 64 \rightarrow 2x^2 - 12x = x^2 + 64$$

$$x^2 - 12x - 64 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x = 16 \\ x = -4 \end{cases}$$

Entonces esto quiere decir que vamos a tener dos rectas tangentes ya que hemos obtenido dos puntos de tangencia:

$$cuando\ x = 16 \rightarrow y = f(16) + f'(16)(x - 16)$$

$$cuando\ x = -4 \rightarrow y = f(-4) + f'(-4)(x + 4)$$

JUNIO 2019 B3.- Sea la función $f(x) = x^2e^{-4x}$ Calcula la primera y la segunda derivada de la función. Hallar los máximos y los mínimos.

$$f'(x) = 2xe^{-4x} - 4x^2e^{-4x} \rightarrow f'(x) = e^{-4x}(2x - 4x^2)$$

$$f''(x) = -4e^{-4x}(2x - 4x^2) + e^{-4x}(2 - 8x) \rightarrow$$

$$f''(x) = e^{-4x}(-8x + 16x^2 + 2 - 8x) \rightarrow f''(x) = e^{-4x}(16x^2 - 16x + 2)$$

Para hallar los máximos o mínimos de una función: $f'(x) = 0$

$$e^{-4x}(2x - 4x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} e^{-4x} = 0 \rightarrow \ No\ es\ posible \\ 2x - 4x^2 = 0 \rightarrow x(2 - 4x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Para saber si estos puntos son máximos o mínimos utilizaremos la segunda derivada:

$$f''(0) > 0 \rightarrow Minimo$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \rightarrow Maximo$$

JUNIO 2018 A3.- Sea la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & x \leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & x > 1 \end{cases}$$

Estudiar su continuidad y su derivabilidad en función del parámetro a.

Comprobamos que las funciones son continuas en sus respectivos intervalos. En este caso lo son, así que, pasamos a comprobar la continuidad.

Para que la función sea continua se tiene que cumplir la siguiente igualdad:

$$f(1) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \end{cases}$$

$$3 - a(1)^2 = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{ax} = \dfrac{2}{a} \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 3 - ax^2 = 3 - a \end{cases}$$

De esta igualdad podemos deducir; para que la función sea continua:

$$3 - a = \frac{2}{a} \to a(3 - a) = 2 \to 3a - a^2 = 2 \to -a^2 + 3a - 2 = 0$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-1)(-2)}}{-2} = \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Ahora vamos a calcular la derivabilidad y comprobar que valores obtenemos para hacer el estudio de las soluciones:

$$f'(x) = \begin{cases} -2ax & x \leq 1 \\ \dfrac{-2}{ax^2} & x > 1 \end{cases}$$

$$f'(1^+) = f'(1^-)$$

$$\frac{-2}{a} = -2a \to -2 = -2a^2 \to 1 = a^2 \to \pm 1 = a$$

Soluciones:

- $\Rightarrow$ Cuando $a = 2 \to la\ función\ es\ continua\ pero\ no\ derivable.$
- $\Rightarrow$ Cuando $a = 1$

$\to La\ función\ es\ continua\ y\ derivable\ ya\ que\ es\ un\ valor\ que\ cumple\ las\ dos\ restricciones.$

- $\Rightarrow$ Cuando $a = -1$

$\to la\ función\ no\ es\ continua, entonces, tampoco\ es\ derivable.$

JUNIO 2018 B3.- Dada la función $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2-4}$ se pide

1. Hallar las asíntotas de la función.
2. Hallar los intervalos donde es creciente y donde es decreciente.
3. ¿Tiene extremos la función?, En caso afirmativo ¿en que puntos?

Lo primero debes de calcular el dominio de la función, ya que es en esos puntos donde podremos encontrar las Asíntotas Verticales:

$$x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2$$

Tenemos dos posibles AV:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3}{x^2-4}=\frac{1}{0}\rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-3}{x^2-4}\rightarrow \frac{(2{,}1)^2-3}{(2{,}1)^2-4}\rightarrow \frac{+}{+}\rightarrow +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-3}{x^2-4}\rightarrow \frac{(1{,}9)^2-3}{(1{,}9)^2-4}\rightarrow \frac{+}{-}\rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3}{x^2-4}=\frac{1}{0}\rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-}\frac{x^2-3}{x^2-4}\rightarrow \frac{(-2{,}1)^2-3}{(-2{,}1)^2-4}\rightarrow \frac{+}{+}\rightarrow +\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+}\frac{x^2-3}{x^2-4}\rightarrow \frac{(-1{,}9)^2-3}{(-1{,}9)^2-4}\rightarrow \frac{+}{-}\rightarrow -\infty \end{cases}$$

Por tanto, tenemos dos asíntotas verticales.

Para la asíntota horizontal tenemos que estudiar el limite en el infinito y menos infinito:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{x^2-4}\rightarrow\frac{\infty}{\infty}\rightarrow 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x^2-4}\rightarrow\frac{\infty}{\infty}\rightarrow 1$$

Por tanto, en $y=1$ tenemos una asíntota horizontal. Como existe asíntota horizontal, no existe asíntota oblicua.

Ahora para los intervalos de crecimiento y decrecimiento; $f'(x)=0$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-(x^2-3)2x}{(x^2-4)^2}\rightarrow f'(x)=\frac{2x^3-8x-2x^3+6x}{(x^2-4)^2}\rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}\rightarrow f'(x)=0\rightarrow \frac{-2x}{(x^2-4)^2}=0\rightarrow -2x=0\rightarrow x=0$$

$$f'(-3) > 0 \rightarrow intervalo\ creciente\ (-\infty, -2)$$

$$f'(-1) > 0 \rightarrow intervalo\ creciente\ (-2,0)$$

$$f'(1) < 0 \rightarrow intervalo\ decreciente\ (0,2)$$

$$f'(3) > 0 \rightarrow intervalo\ decreciente\ (2, \infty)$$

La función tiene un máximo en el punto $x = 0 \rightarrow y = f(0) = \frac{0^2-3}{0^2-4} = \frac{3}{4}$

JULIO 2018 A3.- Dada la función $f(x) = x^2e^{-x}$ estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de máximos, mínimos y asíntotas.

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} \rightarrow f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$$

$$f''(x) = -e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) \rightarrow f''(x) = e^{-x}(2x - x^2 + 2 - 2x)$$

$$f''(x) = e^{-x}(-x^2 + 2)$$

Para los intervalos de crecimiento y decrecimiento $f'(x) = 0$

$$f'(x) = e^{-x}(2x - x^2) \rightarrow$$

$$e^{-x}(2x - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} e^{-x} = 0 \rightarrow NO\ TIENE\ SOLUCIÓN \\ 2x - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$f''(0) > 0 \rightarrow minimo\ ya\ que\ el\ resultado\ es\ positivo.$$

$$f''(2) < 0 \rightarrow máximo\ ya\ que\ el\ resultado\ es\ negativo.$$

Con esta información podemos deducir los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$(-\infty, 0) \rightarrow intervalo\ decreciente$$

$$(0,2) \rightarrow intervalo\ creciente$$

$$(2, \infty) \rightarrow intervalo\ decreciente$$

Para el calculo de asíntotas, al ser una función polinómica y exponencial su domino es toda la recta por tanto no tendrá Asíntota Vertical.

Para el calculo de la Asíntota Horizontal, tenemos que calcular los limites en el infinito y menos infinito:

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \to \frac{\infty}{\infty} \to Como\ la\ funcion\ exponencial\ es\ mas\ fuerte \to 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = \infty$$

Tenemos, por tanto, una Asíntota Horizontal en $y = 0$ cuando cogemos valores de x muy grandes.

Como tenemos Asíntota Horizontal, no existe A. Oblicua.

JULIO 2018 B3.- De la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ se sabe que su gráfica pasa por el punto $(1,0)$ y tiene un extremo relativo en $x = 0$ de valor 1.

3. Hallar A, B y C
4. ¿El extremo situado en el punto $x = 0$ $es\ un\ maximo\ o\ es\ minimo$?

$$f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$$

$$P(1,0) \to f(1) = 0 \to 1 + A + B + C = 0 \to A + B + C = -1$$

$$Extremos\ (0,1) \to \begin{cases} f(0) = 1 \to C = 1 \\ f'(0) = 0 \to B = 0 \end{cases}$$

Sabiendo los valores de B y C

$$A + B + C = -1 \to A = -1 - B - C \to A = -1 - 0 - 1 \to A = -2$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \to f'(x) = 3x^2 - 4x \to f''(x) = 6x - 4$$

$$f''(0) = 6(0) - 4 = -4 < 0 \to MAXIMO, es\ decir\ en\ x = 0\ tienes\ un\ MAXIMO$$

JULIO 2018 A5.- Calcular el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 8.

Lo primero es entender que si la hipotenusa mide 8 y estamos trabajando con un triangulo rectángulo, eso quiere decir que podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = h^2 \to x^2 + y^2 = 8^2$$

Esta seria la función limitante del problema, solo podemos trabajar con triangulo rectángulos cuya hipotenusa sea 8.

La función objetivo del problema sería el área máxima:

$$A = \frac{x \cdot y}{2}$$

Ahora de la función limitante despejas la incógnita y:

$$y = \sqrt{8^2 - x^2}$$

Esta expresión la cambiamos en la expresión del Área para poder después derivar e igualar a cero para calcular el área máxima.

$$A = \frac{x \cdot y}{2}$$

$$A = \frac{x \cdot \sqrt{8^2 - x^2}}{2}$$

$$A' = \frac{\sqrt{8^2 - x^2} + x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{8^2 - x^2}}}{2} \to A' = \frac{64 - x^2 - x^2}{2} \to A' = 32 - x^2$$

Ahora tienes que igualar a cero esta expresión para determinar el valor de x que hace máximo el área del triangulo:

$$32 - x^2 = 0 \to x = \sqrt{32} \to x = 4\sqrt{2}$$

Sabiendo x, podemos determinar y:

$$y = \sqrt{8^2 - x^2} \to y = 4\sqrt{2}$$

EL área de ese triangulo será

$$A = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 16$$

JUNIO 2017 A3.- Calcular el valor de los parámetros c y d sabiendo que la gráfica de la función definida por $f(x) = 2x^3 - x^2 + cx + d$, tiene como recta tangente en el punto $P(1, -2)$ la recta de ecuación $y = 5x - 7$

Lo primero, como siempre, en estos ejercicios, calculamos la primera derivada de la curva, ya que la vamos a necesitar:

$$f'(x) = 6x^2 - 2x + c$$

Sabemos que en el punto $P(1, -2)$ la curva tiene una recta tangente paralela a

$$y = 5x - 7$$

Lo mas importante y lo principal es identificar la pendiente, en este caso $m = 5$

Entonces, con esta información:

$$P(1, -2) \rightarrow \begin{cases} f(1) = -2 \\ f'(1) = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 - 1 + c + d = -2 \\ 6 - 2 + c = 5 \end{cases} \rightarrow de\ la\ segunda\ ecuacion:$$

$$c = 1, sabiendo\ este\ valor \rightarrow d = -4$$

JUNIO 2017 B3.- Determinar los valores a y b para que la función f definida de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + a & x \leq 2 \\ -x^2 + bx & x > 2 \end{cases}$$

Sea derivable en todo su dominio.

Estamos trabajando con funciones polinómicas, es decir, su dominio será siempre toda la recta real, esto quiere decir, que el único problema que podemos encontrar esta en el salto, es decir, $en\ x = 2$

Para que sea derivable primero tiene que ser continua, por tanto, debe cumplir lo siguiente:

$$f(2) = \begin{cases} \lim_{x \to 2^+} f(x) \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) \end{cases}$$

$$4 + 8 + a = \begin{cases} \lim_{x \to 2^+} f(x) = -4 + 2b \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) = 12 + a \end{cases} \rightarrow 12 + a = -4 + 2b \rightarrow a - 2b = -16$$

Ahora tenemos que comprobar la derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+4 & x<2 \\ -2x+b & x>2 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable:

$$f'(2^-) = f'(2^+)$$

$$8 = -4 + b \rightarrow b = 12$$

Sabiendo que $b = 12 \rightarrow a - 24 = -16 \rightarrow a = 8$

JULIO 2017 A3.-Sabemos que la recta $y = 2x - 10$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx - 1$ en el punto $P(1, -8)$

- Calcula los valores de A y B
- Calcular los puntos de corte de la función con la recta de ecuación $y = -15x - 1$

Para calcular los parámetros vamos a utilizar la información que nos proporciona el enunciado sobre la función:

Lo primero, antes de nada, calcular la primera derivada que la vamos a necesitar:

$$f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$$

$$P.Tangencia\ P(1,-8) \rightarrow \begin{cases} f(1) = -8 \\ f'(1) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + A + B - 1 = -8 \\ 3 + 2A + B = 2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} A + B = -8 \\ 2A + B = -1 \end{cases} \rightarrow Reduccion \rightarrow -A = -7 \rightarrow A = 7$$

Sabiendo que $A = 7 \rightarrow B = -15$

La función que hemos determinado finalmente es:

$$f(x) = x^3 + 7x^2 - 15x - 1$$

Para saber los puntos de corte con la recta de ecuación $y = -15x - 1$ simplemente tendremos que hacer un sistema con las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 7x^2 - 15x - 1 \\ y = -15x - 1 \end{cases} \rightarrow x^3 + 7x^2 - 15x - 1 = -15x - 1 \rightarrow$$

$$x^3 + 7x^2 = 0 \rightarrow x^2(x+7) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -7 \end{cases}$$

JULIO 2017 B3.- Dada la función $y = \frac{x^3+4}{x^2}$

Razonar la existencia de máximos y mínimos de la función. Si existen hallarlos.

¿Para que intervalos es creciente la función?

Hallar todas las asíntotas de la función

Dominio: $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow Dominio\ y = f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

Para calcular los máximos y mínimos, tenemos que calcular la primera derivada de la función e igualarla a cero:

$$y' = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3+4)2x}{x^4} \rightarrow y' = \frac{x^4 - 8x}{x^4} \rightarrow y' = \frac{x(x^3-8)}{x^4}$$

$$y' = \frac{x^3 - 8}{x^3} \rightarrow y' = 0 \rightarrow x^3 - 8 = 0 \rightarrow x = 2$$

Ahora con este valor y los puntos que estén fuera de dominio veremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

Cogemos un valor de cada intervalo para ver el signo de la primera derivada en cada intervalo:

$$f'(-1) > 0 \rightarrow creciente \rightarrow (-\infty, 0)$$

$$f'(1) < 0 \rightarrow decreciente \rightarrow (0,2)$$

$$f'(3) > 0 \rightarrow creciente \rightarrow (2, \infty)$$

Cuando intervalo crece y después decrece→ $maximo \rightarrow$

$$¡Cuidado!\ en\ x = 0\ no\ podemos\ tener\ un\ maximo, es\ un\ punto\ fuera\ del\ dominio.$$

Cuando un intervalo decrece y después crece→ $minimo \rightarrow x = 2$

Para hallar ahora las asíntotas de la función lo primero es hallar la asíntota vertical, recuerda que se hacen los limites con los puntos que están fuera del dominio:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+4}{x^2}=\frac{4}{0}\to\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3+4}{x^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3+4}{x^2}=+\infty\end{cases}$$

Tenemos una asíntota vertical en $x=0$

Ahora vamos a calcular la asíntota horizontal, para eso debemos de hacer los limites cuando x tiende a infinito y menos infinito:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{x^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+4}{x^2}=-\infty\end{cases}\to como\ nos\ da\ \pm\infty\ no\ tiene\ AH$$

Como no tiene asíntota horizontal podemos hacer el calculo de la Asíntota oblicua:

Recuerda que la AO debe tener esta expresión:

$$y=mx+n$$

$$m=\lim_{\pm\infty}\frac{\frac{x^3+4}{x^2}}{x}=\lim_{\pm\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1$$

$$n=\lim_{\pm\infty}\frac{x^3+4}{x^2}-x=\lim_{\pm\infty}\frac{4}{x^2}=0$$

Por tanto, la expresión de la asíntota oblicua será: $y=x$

JUNIO 2016 A3.- Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

Y calcula cuales son sus máximos y sus mínimos.

Lo primero que debemos hacer es calcular el dominio de la función:

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

Para calcular el crecimiento y decrecimiento de la función debemos de derivar la función e igualarla a cero:

$$y' = \frac{3x^2 \cdot (x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} \rightarrow y' = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} \rightarrow y' = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}$$

Ahora tienes que igualar a cero la expresión de la primera derivada:

$$\frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow x^4 - 12x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{12} \rightarrow x = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$f'(-4) > 0 \rightarrow \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \rightarrow intervalo\ creciente$$

$$f'(-3) < 0 \rightarrow \left(-2\sqrt{3}, -2\right) \rightarrow intervalo\ decreciente$$

$$f'(-1) < 0 \rightarrow (-2{,}0) \rightarrow intervalo\ decreciente$$

$$f'(1) < 0 \rightarrow (0{,}2) \rightarrow intervalo\ decreciente$$

$$f'(3) < 0 \rightarrow \left(2, 2\sqrt{3}\right) \rightarrow intervalo\ decreciente$$

$$f'(4) > 0 \rightarrow \left(2\sqrt{3}, \infty\right) \rightarrow Intervalo\ creciente$$

Con toda esta información ya podemos decir también que puntos serán los máximos y cuales los mínimos. Cuando tenemos un intervalo creciente y seguido uno decreciente, estamos ante un máximo. Cuando tenemos un intervalo decreciente y seguido uno creciente estamos ante un mínimo.

Por lo tanto, en $-2\sqrt{3}$ tenemos un máximo y en $2\sqrt{3}$ tenemos un mínimo

En el punto cero no tenemos ni máximo ni mínimo.

JUNIO 2016 B3.- Dada la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + C$

Calcula los valores de los parámetros A, B y C de manera que la función satisfaga las siguientes propiedades:

Pasa por el punto $(0,0)$

Tenga un máximo local en el punto $(1,2)$

Calcula todos los puntos donde la función tendrá una recta tangente horizontal.

Recuerda que en este tipo de ejercicios lo primero que solemos hacer, es calcular la primera derivada de la función:

$$f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx$$

Como la función nos dice que pasa por el punto (0,0), y utilizando el esquema diremos que:

$$f(0) = 0 \rightarrow C = 0$$

Ahora habla de un máximo y nos lo da como forma de punto, por tanto,

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + B + C = 2 \\ 3A + 2B = 0 \end{cases} \rightarrow C = 0 \rightarrow \begin{matrix} A + B = 2 \\ 3A + 2B = 0 \end{matrix} \rightarrow Mediante\ reduccion \rightarrow$$

$$\begin{matrix} A + B = 2 \\ 3A + 2B = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -2A - 2B = -4 \\ 3A + 2B = 0 \end{matrix} \rightarrow A = -4$$

Como ya sabemos el valor de $A = -4 \rightarrow A + B = 2 \rightarrow B = 6$

Ahora tenemos que calcular todos los puntos en los que la función tiene una tangente horizontal, eso trasladado a las matemáticas quiere decir,

$$f'(x) = m$$

$$-12x^2 + 12x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

JULIO 2016 A3.- Calcular los valores A, B, C y D para que la función

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Tenga extremos relativos en $(0{,}0)\ y\ en\ (2{,}2)$

¡PRUEBA TU!

RECUERDA :

$$Extremo\ (0{,}0) \rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

$$Extremo\ (2{,}2) \rightarrow \begin{cases} f(2) = 2 \\ f'(2) = 0 \end{cases}$$

SOLUCION: $A = \frac{-1}{2}\ ; B = \frac{3}{2}\ ; C = 0\ ; D = 0$

JULIO 2016 B3.- Dada la función polinómica

$$P(x) = \frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2}$$

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Obtener sus máximos y sus mínimos.

¿Existe algún valor de x tal que $P(x) < 0$?

Empezamos calculando la primera derivada de la función:

$$p'(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$$

Ahora debemos de igualar a cero la primera derivada para determinar los posibles máximos y mínimos de la función.

$$p'(x) = 0 \rightarrow 2x^3 - 3x^2 + x = 0 \rightarrow x(2x^2 - 3x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(1)}}{4} \rightarrow x = \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Para saber que clase de extremos son los puntos que hemos calculado debemos de calcular la segunda derivada:

$$p''(x) = 6x^2 - 6x + 1$$

Ahora sustituimos los valores de igualar a cero la primera derivada paras ver el signo, si da positivo se trata de un mínimo, si da negativo se trata de un máximo.

$$p''(0) = +1 > 0 \rightarrow minimo\ en\ x = 0$$

$$p''(1) = +1 > 0 \rightarrow minimo\ en\ x = 1$$

$$p''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{4} - 3 + 1 < 0 \rightarrow maximo\ en\ x = \frac{1}{2}$$

Gracias a saber los puntos donde la función es máximo y donde es mínimo, podemos determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

$$(-\infty, 0) \rightarrow intervalo\ decreciente$$

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \rightarrow Intervalo\ creciente$$

$$\left(\frac{1}{2},1\right) \rightarrow intervalo\ decreciente$$

$$(1,\infty) \rightarrow intervalo\ creciente$$

Para saber si existe algún valor de x tal que $P(x) < 0$ tenemos que igualar a cero la función:

$$P(x) = 0$$

$$\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2} = 0 \rightarrow x^4 - 2x^3 + x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 2x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ahora con estos valores estudiamos el signo de cada intervalo de la función, si encontramos algún intervalo cuya $P(x)$ sea inferior a cero, estaremos dando solución a la pregunta del enunciado:

$$P(-1) > 0\ ;\ P(0{,}5) > 0\ ; P(2) > 0$$

Esto quiere decir que no existe ningún valor de x que haga que $P(x) < 0$

JULIO 2015 A3.- Para adornar un mural queremos construir un marco de madera rectangular que encierre una superficie de cinco metros cuadrados. Sabemos que el coste de cada centímetro del marco en los lados horizontales es de 1,5€, mientras que en los lados verticales es de 2,7€. Determinar las dimensiones que hemos de elegir para que el marco nos resulte lo mas barato posible.

Como sabemos que estamos trabajando con un marco rectangular podemos definir la siguiente expresión algebraica: $x \cdot y = 5$ ya que, nos dice que la superficie, es decir, el área es de cinco metros cuadrados.

Definimos que la base sea x y que la altura sea y por tanto,

$$1{,}5x + 2{,}7y + 1{,}5x + 2{,}7y \rightarrow minimizar\ para\ que\ el\ coste\ sea\ el\ minimo.$$

De la ecuación $x \cdot y = 5 \rightarrow \mathrm{y} = \frac{5}{x}$

Esta expresión la sustituimos en la ecuación que queremos minimizar:

$$3x + 5{,}4y \rightarrow 3x + 5{,}4 \cdot \frac{5}{x}$$

Ahora la tenemos que derivar e igualar a cero:

$$3 - \frac{27}{x^2} = 0 \rightarrow 3x^2 - 27 = 0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{27}{3}} \rightarrow x = \pm 3$$

El resultado negativo lo tenemos que descartar ya que estamos hablando de medidas, por tanto, el resultado que nos interesa es $x = 3$

Para comprobar que se trata de un mínimo, podemos sustituir este valor en la segunda derivada.

La segunda derivada$\rightarrow \frac{54}{x^3} \rightarrow x = 3 \rightarrow \frac{54}{27} = 3 > 0 \rightarrow x = 3\ es\ un\ minimo.$

Por tanto, las medidas que debe de tener el marco son:

$$x = 3\,;\, y = \frac{5}{3}$$

JULIO 2015 B3.- Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & x > 2 \end{cases}$$

Hallar los valores de a y b sabiendo que la función es derivable en toda la recta real

Calcular la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisas $x = 1$

¡PRUEBA TU!

RECUERDA QUE PARA QUE UNA FUNCIÓN SEA DERIVABLE PRIMERO TIENE QUE SER CONTINUA:

$$\boldsymbol{f(x_0) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x_0) \end{cases} \qquad f'(x_0^+) = f'(x_0^-)}$$

La ecuación de una recta tangente, sabiendo el punto de tangencia:

$$\boldsymbol{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \; donde \; x_0 \; es \; el \; punto \; de \; tangencia.}$$

SOLUCION:

$\boldsymbol{a = 2 \,;\, b = -7}$ $\boldsymbol{y - 5 = 7(x - 1)}$

JUNIO 2015 A3.- Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

- Determinar los coeficientes de a, b y c sabiendo que tiene un extremo relativo en $x = -1\ y\ en\ x = 1$ y que además pasa por el origen de coordenadas.
- Estudiar la naturaleza de ambos extremos relativos y realizar un dibujo aproximado del polinomio.

¡PRUEBA TU!

RECUERDA:

$$Extremo\ x = -1 \rightarrow f'(-1) = 0$$

$$Extremo\ x = 1 \rightarrow f'(1) = 0$$

$$Punto\ (0,0) \rightarrow f(0) = 0$$

SOLUCIONES:

$$a = 0; b = -3\ ; c = 0$$

$$x = -1 \rightarrow es\ un\ maximo\ relativo$$

$$x = 1 \rightarrow es\ un\ minimo\ relativo$$

JUNIO 2015 B3.- Sea $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$

Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función

Calcula los extremos relativos de la función.

$$f'(x) = (3 - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x \rightarrow f'(x) = e^x(3 - x - 2x^2)$$

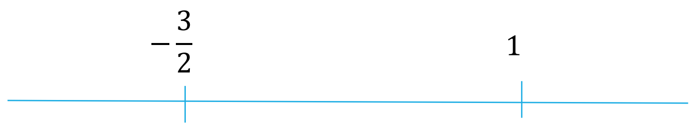
$$f''(x) = e^x(3 - x - 2x^2) + e^x(-1 - 4x) \rightarrow f''(x) = e^x(2 - 5x - 2x^2)$$

He calculado la primera y la segunda derivada ya que quizás puedan servir de ayuda para futuros cálculos.

Para hallar los extremos de una función, debemos de igualar a cero la primera derivada:

$$f'(x) = 0$$

$$e^x(3 - x - 2x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \rightarrow No\ tiene\ solución \\ 3 - x - 2x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{cases}$$



$$f'(-2) < 0 \rightarrow intervalo\ decreciente$$

$$f'(0) > 0 \rightarrow intervalo\ creciente$$

$$f'(2) < 0 \rightarrow intervalo\ decreciente.$$

Gracias a saberlos intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, podemos saber donde esta el máximo y donde esta el mínimo.

Tenemos un mínimo en $x = -\frac{3}{2}$

Tenemos un máximo *en* $x = 1$

JUNIO 2014 A3.- Sea la función $f(x) = ax^3 + bx + c$.

- Obtener los valores de a, b y c para que pase por el origen de coordenadas y tenga un mínimo en el punto $(1, -1)$
- ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos?

¡PRUEBA TU!

RECUERDA:

$$Minimo\ (1,-1) \rightarrow \begin{cases} f(1) = -1 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

$$Origen\ de\ coordenadas \rightarrow (0,0) \rightarrow f(0) = 0$$

SOLUCIONES:

$$a = \frac{1}{2}\ ; b = -\frac{3}{2}\ ; c = 0$$

La función tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$

JUNIO 2014 B3.-Se sabe que la función F es derivable en todos los puntos, y que esta definida en el intervalo desde menos infinito hasta cero incluido, por la formula:

$$F(x) = 1 + 2x + Ax^2$$

Y en el intervalo desde cero hasta infinito por la formula

$$F(x) = B + Ax$$

- Encontrar los valores de A y de B para que se verifiquen las condiciones anteriores.
- Representa la función

¡PRUEBA TU!

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2x + Ax^2 & x \leq 0 \\ B + Ax & x > 0 \end{cases}$$

TIENES QUE DEMOSTRAR PRIMERO LA CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN Y DESPUÉS LA DERIVABILIDAD.

RECUERDA QUE PARA QUE UNA FUNCIÓN SEA DERIVABLE PRIMERO TIENE QUE SER CONTINUA:

$$f(x_0) = \begin{cases} \lim\limits_{x-x_0^+} f(x_0) \\ \lim\limits_{x-x_0^-} f(x_0) \end{cases} \qquad f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

JULIO 2014 A3.-

- Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos.
- Trazar un dibujo aproximado de la gráfica de la función y contestar de forma razonada a la siguiente pregunta: ¿Cuántos valores de x satisfacen $f(x) = 0$

$$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 3}$$

Recuerda que los máximos y mínimos de las funciones se calculan igualando la primera derivada a cero.

$$\boldsymbol{f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1}$$

Calculamos las segundas derivada para así determinar si estos puntos son máximos o mínimos.

$$f''(x) = 6x$$

Sustituimos los puntos que han salido de igualar a cero la primera derivada:

$$f''(1) = 6 > 0 \rightarrow MINIMO\ EN\ x = 1$$

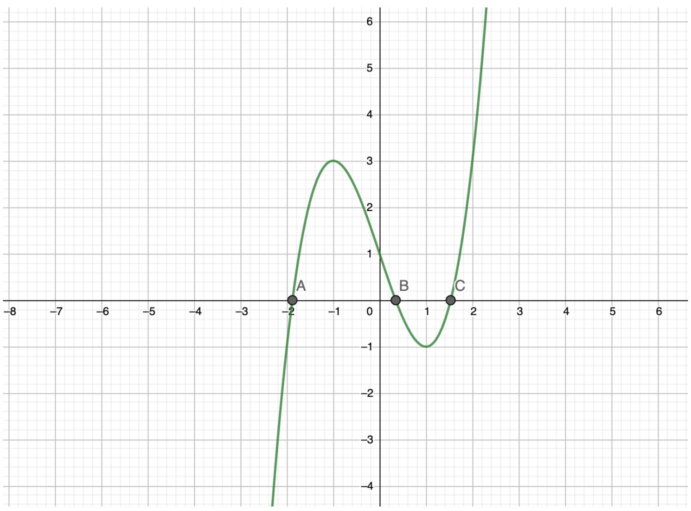
$$f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow MAXIMO\ EN\ x = -1$$

Agracias a conocer donde están los máximos y mínimos de la función, podemos saber los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$(-\infty, -1) \rightarrow Intervalo\ creciente$$

$$(-1,1) \rightarrow Intervalo\ decreciente$$

$$(1, \infty) \rightarrow Intervalo\ creciente$$



Como podemos comprobar, cuando realizamos la representación de la función, existen tres puntos donde $f(x) = 0$

JULIO 2014 B3.- Se sabe que la suma de los cuadrados de dos números positivos A y B vale 32. Calcular dichos números para que su producto sea máximo.

$$A^2 + B^2 = 32$$

$$A \cdot B \rightarrow máximo$$

De la función que no esta limitando el problema, es decir, la suma de los cuadrados de dos números tiene que ser 32, despejamos uno de los valores, A o B:

$$A = \sqrt{32 - B^2}$$

Cuando ya hemos despejado uno de los valores, lo introducimos en la función que tenemos que hacer máxima.

$$A \cdot B = B \cdot \sqrt{32 - B^2} \rightarrow Ahora\ calculamos\ la\ derivada:$$

$$1 \cdot \sqrt{32 - B^2} + B \cdot \frac{-2B}{2\sqrt{32 - B^2}} \rightarrow \sqrt{32 - B^2} - \frac{B^2}{\sqrt{32 - B^2}} \rightarrow \frac{32 - B^2 - B^2}{\sqrt{32 - B^2}}$$

$$\frac{32 - 2B^2}{\sqrt{32 - B^2}} \rightarrow Ahora\ igualamos\ a\ cero\ esta\ expresion\ para\ encontrar\ el\ MAX.$$

$$\frac{32 - 2B^2}{\sqrt{32 - B^2}} = 0 \rightarrow 32 - 2B^2 = 0 \rightarrow B = \pm 4$$

Al decir el enunciado que los números tiene que ser positivos solo nos podemos quedar con el valor de $B = 4$

Por tanto, ahora si sabemos cual es el valor de B, podemos saber cual es el valor de A:

$$A = \sqrt{32 - B^2} \rightarrow A = \sqrt{16} \rightarrow A = 4$$

JULIO 2013 A3.- Una franquicia de tiendas de electrónica ha estimado que sus beneficios semanales dependen del numero de tiendas n que tiene en funcionamiento de acuerdo con la expresión:

$$B(n) = -4n(2n^2 - 15n + 24)$$

Determinar razonadamente:

El numero de tiendas que debe tener para maximizar sus beneficios semanales

El valor de dichos beneficios máximos

Como siempre que un ejercicio nos plantee el calculo de máximos o mínimos debemos de pensar en derivar e igualar a cero, en este caso queremos el máximo de beneficios, por tanto, debemos de igualar a cero la derivada de la función de beneficios.

$$B(n) = -4n(2n^2 - 15n + 24) = -8n^3 + 60n^2 - 96n$$

$$B'(n) = -24n^2 + 120n - 96$$

Ahora tienes que igualar a cero esta expresión:

$$= -24n^2 + 120n - 96 = 0 \rightarrow n = \frac{-120 \pm \sqrt{120^2 - 4(-24)(-96)}}{-48} = \begin{cases} n = 4 \\ n = 1 \end{cases}$$

Ahora debemos de saber cual de los dos valores hace que la expresión se maximice, para saberlo vamos a utilizar la segunda derivada:

$$B''(x) = -48n + 120$$

$$B''(4) = -48(4) + 120 = -72 < 0 \rightarrow MAXIMO$$

$$B''(1) = -48(1) + 120 = 72 > 0 \rightarrow MINIMO$$

Por tanto, cuando $n = 4\ tenemos\ un\ maximo$

$$esto\ quiere\ decir\ que\ tiene\ que\ tener\ 4\ tiendas.$$

Para saber cuales son esos beneficios cuando tienen 4 tiendas:

$$B(4) = (-4(4))(2(4)^2 - 15(4) + 24) = 64$$

JULIO 2013 B3.- Dada la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$

- Hallar los valores de los parámetros para que la función tenga un extremo en $x = 0 \; y \; otro \; en \; x = 2$¿Son únicos dichos parámetros?
- Determinar de que tipo de extremo se trata (¿máximo o mínimo?)
- Representar la función en el caso $C = 0$

¡PRUEBA TU!

$$Extremos \; en \; x = 0 \rightarrow f'(0) = 0$$

$$Extremos \; en \; x = 2 \rightarrow f'(2) = 0$$

Para saber si estos extremos son los únicos tienes que igualar a cero la primera derivada y ver cuantos resultados obtienes.

SOLUCIONES:

$$\boldsymbol{A = -3 \; ; B = 0}$$

CUANDO $\boldsymbol{X = 0 \rightarrow ES \; UN \; MAXIMO \; EN \; X = 2 \rightarrow UN \; MINIMO.}$

JUNIO 2013 A3.- Sea la función $f(x)=\frac{2}{x^2-5x+6}$. Obtener razonadamente:

El dominio y las asíntotas de la función

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

Realizar un dibujo aproximado de la gráfica de dicha función

Para calcular el dominio de una función, en este caso una fracción, lo primero que debemos de hacer, es igualar a cero el denominador, ya que en una división no podemos dividir entre cero.

$$x^2-5x+6=0\rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-4(1)(6)}}{2}\rightarrow x=\begin{cases}3\\2\end{cases}$$

El dominio, por tanto, será:

$$Dom\ f(x)=\mathbb{R}-\{3,2\}$$

Para la asíntota vertical, tenemos que estudiar los limites en los puntos que están fuera del dominio:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2}{x^2-5x+6}=\frac{2}{0}\rightarrow\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 3^-}\frac{2}{x^2-5x+6}\rightarrow -\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 3^+}\frac{2}{x^2-5x+6}\rightarrow +\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2}{x^2-5x+6}=\frac{2}{0}\rightarrow\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{2}{x^2-5x+6}\rightarrow +\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{2}{x^2-5x+6}\rightarrow -\infty\end{cases}$$

La asíntota horizontal la tenemos que calcular haciendo los limites en el infinito y en el menos infinito.

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2-5x+6}\rightarrow 0^+\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2-5x+6}\rightarrow 0^+\end{cases}\rightarrow tenemos\ una\ asintota\ en\ y=0$$

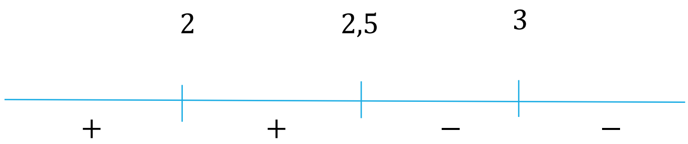
Para el calculo de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, debemos de igualar a cero la primera derivada de la función:

$$f'(x)=\frac{-2(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}\rightarrow f'(x)=\frac{-4x+10}{(x^2-5x+6)^2}$$

Igualamos a cero la primera derivada:

$$\frac{-4x+10}{(x^2-5x+6)^2}=0 \to\ -4x+10=0 \to x=\frac{5}{2}$$

Con este valor, que será un posible máximo o mínimo, y los puntos que están fuera del dominio, que son posibles asíntotas verticales, calculamos el signo de la primera derivada para saber el crecimiento y el decrecimiento.

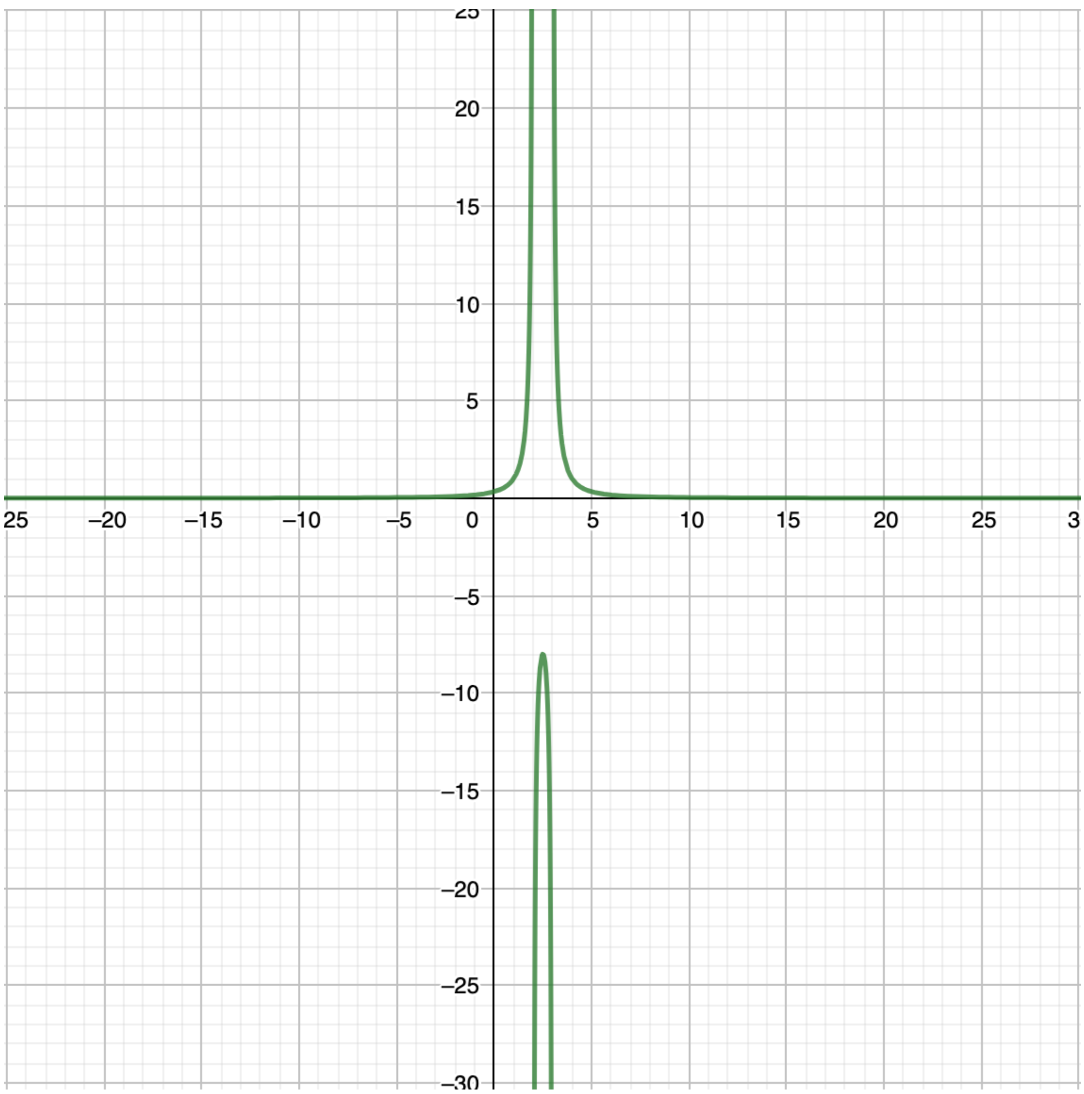


De esta manera, observando el signo, podemos saber el crecimiento y decrecimiento:

$$(-\infty,2)\cup(2,2'5)\to creciente$$

$$(2'5,3)\cup(3,\infty)\to decreciente$$

Con toda la información que tenemos se puede crear una representación de la función



JUNIO 2013 B3.- Se divide un segmento de longitud 200 cm en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

JULIO 2012 A3.- Dada la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$

- Hallar los valores de los parámetros para que la grafica pase por el punto $(1,1)$, tenga un maximo en $x = -4$ y una recta tangente horizontal para $x = 0$.
- Determinar los extremos relativos, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y dibujar la grafica de la función.

¡PRUEBA TU!

$$Punto\ (1,1) \rightarrow f(1) = 1$$

$$Maximo\ x = -4 \rightarrow f'(-4) = 0$$

$$Tangente\ horizontal \rightarrow f'(0) = 0$$

Para el calculo de extremos y de crecimiento y decrecimiento $f'(x) = 0$

SOLUCIONES:

$$A = 6 : B = 0 ; C = -6$$

$$X = -4 \rightarrow MÁXIMO$$

$$X = 0 \rightarrow MÍNIMO$$

$$(-\infty, -4) \cup (0, \infty) \rightarrow CRECIENTE$$

$$(-4,0) \rightarrow DECRECIENTE$$

JULIO 2012 B3.- Una tienda vende aceite a 2 euros el litro. Al vender x litros los costes de todo tipo expresados en euros son $0{,}5x + Cx^2$. Se sabe que el beneficio máximo se obtiene vendiendo 750 litros. Encontrar el valor de C y el beneficio máximo obtenido.

Lo primero que tenemos que hacer es representar de forma analítica la expresión de la función BENEFICIOS:

$$B = ingresos - gastos$$

$$B(x) = 2x - (0{,}5x + Cx^2)$$

Lo que sabemos de esta función es lo siguiente: el máximo se obtiene vendiendo 750 litros. Por tanto,

$$B'(x) = 2 - 0{,}5 - 2Cx \rightarrow B'(x) = 1{,}5 - 2Cx$$

Ahora si nosotros igualamos a cero la derivada de la expresión de beneficios y la igualamos a cero nos debería de dar como resultado $x = 750, entonces$;

$$1{,}5 - 2C(750) = 0 \rightarrow C = 0{,}001$$

Para saber ahora el beneficio máximo obtenido y sabiendo el valor del parámetro C, solo tenemos que sustituir en la función de beneficios la $x = 750$.

$$B(x) = 2x - (0{,}5x + 0{,}001x^2)$$

$$B(750) = 2(750) - (0{,}5(750) + 0{,}001(750)^2)$$

$$B(750) = 562{,}5\ €$$

JUNIO 2012 A3.- Dada la función $f(x) = Ax^3 + Bx$, sabemos que pasa por el punto $P(1,1)$ y además que en ese punto tiene tangente paralela a la recta $y = -3x$.

- De acuerdo con dichas condiciones calcular los valores de A y B.
- Determinar los extremos relativos, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y por último realizar un dibujo de la función.

¡PRUEBA TU!

$$Punto\ (1,1) \rightarrow f(1) = 1$$

$$Recta\ tangente \rightarrow f'(1) = -3$$

Para el calculo de extremos y de crecimiento y decrecimiento $f'(x) = 0$

SOLUCIONES:

$$A = -2\,; B = 3$$

$$x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \rightarrow Mínimo$$

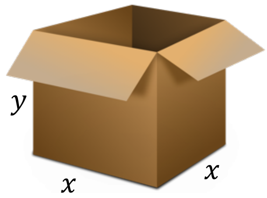
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow Máximo$$

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right) \rightarrow decreciente$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow creciente$$

JUNIO 2012 B3.- Una empresa fabrica cajas de cartón sin tapa, de volumen 4000 centímetros cúbicos. Se sabe que las cajas tienen su base cuadrada.

Hallar la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de cartón empleado en fabricarlas sea mínima.



Lo primero que debes de saber es el volumen de una caja de cartón, es decir, el área de la base por la altura. En este caso como la base es cuadrada su área será x^2, por tanto,

$$Volumen\ caja = x^2 \cdot y$$

La altura de la caja la hemos definido como y

Sabemos que el volumen es $4000\ centimetros\ cúbicos, es\ decir,$

$$x^2 \cdot y = 4000$$

La función que acabamos de plantear es la función que me limita el problema, es decir, solo puedo trabajar con cajas de cartón que tenga $4000\ cm^3$

Ahora buscamos la función que queremos optimizar, en este caso el gasto de cartón tiene que ser mínimo, por tanto, necesitamos conocer el área de la caja, recuerda que no tiene tapa.

Tenemos 4 caras que tienen un área igual a $x \cdot y$ (laterales de la caja de cartón)

También tenemos una cara con un área igual a x^2 (base de la caja de cartón)

$$Área(x, y) = 4(x \cdot y) + x^2$$

De la función que me limita el problema despejo y:

$$y = \frac{4000}{x^2}$$

Este valor de y lo cambiamos en la función que tengo que optimizar:

$$4\left(x \cdot \frac{4000}{x^2}\right) + x^2 = \frac{16000}{x} + x^2$$

Ahora solamente tienes que derivar la ecuación e igualarla a cero para calcular el mínimo:

$$\frac{-16000}{x^2} + 2x = 0 \rightarrow -16000 + 2x^3 = 0 \rightarrow 2x^3 = 16000 \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{16000}{2}} \rightarrow \boxed{x = 20}$$

Si $x = 20 \rightarrow y = \frac{4000}{x^2} \rightarrow \boxed{y = 10}$

JULIO 2011 A3.- Estudiar las asíntotas y los extremos de la función dada por

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Y trazar un bosquejo de la gráfica.

Para el calculo de las asíntotas empezamos determinando el dominio de la función, al ser una fracción sabemos que entre cero no se puede dividir, por tanto,

$$x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

$$dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

En $x = 1$ tenemos una posible asíntota vertical, para comprobarlo, haremos el limite cuando $x \rightarrow 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0}(ind) \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} \rightarrow \frac{+}{+} \rightarrow +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} \rightarrow \frac{+}{-} \rightarrow -\infty \end{cases} \rightarrow Por\ tanto\ x = 1\ A.V.$$

Ahora tenemos que hacer la asíntota horizontal, para su calculo debemos de hacer los limites cuando x tiende a mas infinito y menos infinito:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow Como\ el\ exponente\ de\ arriba\ es\ mayor \rightarrow \infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow Como\ el\ exponente\ de\ arriba\ es\ mayor \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Como podemos comprobar no tenemos Asíntota horizontal, por tanto, podemos calcular la asíntota oblicua:

Para su calculo:

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{\pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{\pm\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

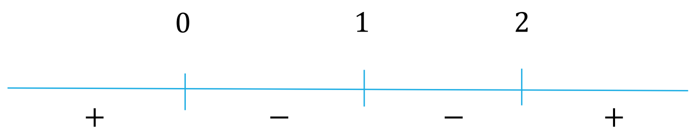
Por tanto, la expresión de la asíntota oblicua será: $y = x + 1$

Pasamos ahora al calculo de los máximo o mínimos de la función, para eso, hacemos la derivada y lo igualamos a cero:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2(1)}{(x-1)^2}\rightarrow f'(x)=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}\rightarrow f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

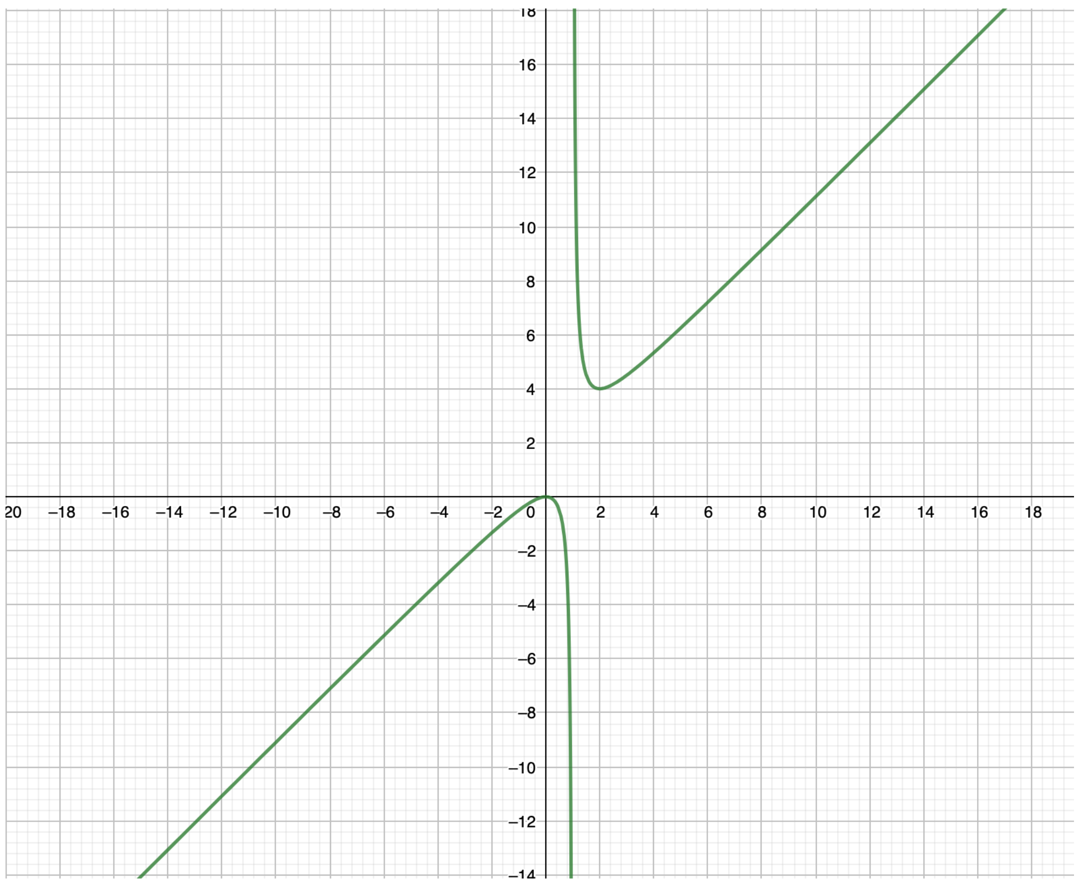
$$f'(x)=0\rightarrow \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\rightarrow x^2-2x=0\rightarrow x(x-2)=0\rightarrow \begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

Con estos valores y los puntos que estén fuera del dominio, tenemos que hacer el estudio de los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Gracias a este estudio, podremos saber que puntos son máximos y cuales mínimos.



Por tanto, tendremos un máximo en $(0, f(0))$, y un mínimo en $(2, f(2))$

Ahora simplemente con toda la información que tenemos, haremos la representación aproximada de la función:



JULIO 2011 B3.- De una función se sabe que es derivable en toda la recta, que es creciente también en toda la recta y que en todos los puntos satisface la desigualdad $f(x) > 0$.

Con estos datos ¿se puede demostrar que $h(x) = e^{f(x)} - f(x)$ es creciente en toda la recta?

$$h'(x) = e^{f(x)} f'(x) - f'(x)$$

La función $f(x), al\ ser\ una\ funcion\ creciente\ en\ toda\ la\ recta, f'(x) > 0\ siempre$.

Como el enunciado también nos dice que $f(x) > 0$.

Podemos afirmar que

$$h'(x) > 0 \rightarrow$$

$$siempre\ creciente\ ya\ que\ la\ función\ exponencial\ es\ mas\ poderosa\ que$$

$$la\ funcion\ polinomica, y\ por\ tanto, siempre\ h'(x) > 0$$

JUNIO 2011 A3.- Sea la función $f(x) = x^2e^{-2x}$

Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Estudiar sus máximos y sus mínimos y trazar un boceto de la gráfica.

$$f'(x) = 2xe^{-2x} + x^2(-2)e^{-2x} \rightarrow e^{-2x}(2x - 2x^2)$$

$$f''(x) = -2e^{-2x}(2x - 2x^2) + e^{-2x}(2 - 4x) \rightarrow f''(x) = e^{-2x}(-2x^2 - 2x + 2)$$

Para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos de la función, deberemos igualar a cero la primera derivada:

$$f'(x) = 0$$

$$e^{-2x}(2x - 2x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} e^{-2x} = 0 \; NO\ ES\ POSIBLE \\ 2x - 2x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Para saber si estos valores que hemos obtenido de igualar a cero la primera derivada son máximos o mínimos, vamos a utilizar la segunda derivada, para eso:

$$f''(0) > 0 \rightarrow MINIMO\ en\ x = 0$$

$$f''(1) < 0 \rightarrow MAXIMO\ en\ x = 1$$

Teniendo la información de los máximos y mínimos podemos determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$(-\infty, 0) \rightarrow intervalo\ decreciente$$

$$(0,1) \rightarrow intervalo\ creciente$$

$$(1, \infty) \rightarrow intervalo\ decreciente$$

JUNIO 2011 B3.- Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

Encontrar los valores de los parámetros de forma que la gráfica contenga al punto $(0,1)$ y que las rectas tangentes a la función en los puntos $x = 0\ y\ x = 1$ sean ambas paralelas a la recta $y = 3x + 5$

¡PRUEBA TU!

$$Punto\ (0,1) \rightarrow f(0) = 1$$

$$Recta\ tangente\ paralela\ y = 3x + 5 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(0) = 3 \\ f'(1) = 3 \end{cases}$$

JULIO 2010 A3.- Un comerciante vende café a 2 euros y 75 céntimos el kilo. El comerciante tiene dos tipos de gastos, el transporte de la mercancía y un impuesto de hacienda. Por cada kilo que vende el transporte le supone un gasto de 25 céntimos de euro. Para calcular los euros que deben de pagarse a hacienda por el impuesto hay que dividir el cuadrado de la cantidad de kilos que se venden entre 1200.

Con estos datos calcular el numero de kilos que debe vender el comerciante para que el beneficio se máximo y calcular dicho beneficio máximo.

Para realizar los cálculos en este tipo de ejercicios, tenemos que diferenciar los ingresos de los gastos para saber cuales son los beneficios del comerciante:

$$ingresos \rightarrow 2{,}75x$$

$$Gastos\ de\ transporte \rightarrow 0{,}25\ x$$

$$gastos\ de\ hacienda \rightarrow \frac{x^2}{1200}$$

$$donde\ x \rightarrow numero\ de\ kilos$$

Por tanto, para escribir la ecuación que representa los beneficios:

$$Beneficios = Ingresos - Gastos$$

$$Beneficios = 2{,}75x - (0{,}25x + \frac{x^2}{1200})$$

Ahora para calcular los beneficios máximos debemos de derivar la expresión e igualarla a cero:

$$B'(x) = 2{,}75 - \left(0{,}25 + \frac{2x}{1200}\right)$$

$$B'(x) = 0 \rightarrow 2{,}75 - \left(0{,}25 + \frac{2x}{1200}\right) = 0 \rightarrow$$

$$3300 - 300 - 2x = 0 \rightarrow -2x = -3000 \rightarrow x = 1500$$

1500 son los kilos que se tienen que vender para que los beneficios sean máximos. Dicho máximo lo tenemos que calcular y seria:

$$B(1500) = 2{,}75(1500) - \left[0{,}25(1500) + \frac{(1500)^2}{1200}\right] = 1875€$$

JULIO 2010 B3.- Calcular el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ en que la tangente en dicho punto es paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes. Hacer una representación grafica y calcular dicha recta tangente.

Lo primero que tienes que tener claro es, ¿Cuál es la recta que representa la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante? $\rightarrow y = -x$

Por tanto, cuando ya sabemos cual es la expresión de la recta que es la bisectriz, podemos saber la pendiente, en este caso; $m = -1$.

Ahora para saber en que puntos la curva tiene una recta tangente que es paralela a la bisectriz tenemos que calcular la primera derivada de la curva e igualarla a la pendiente:

$$f'(x) = m$$

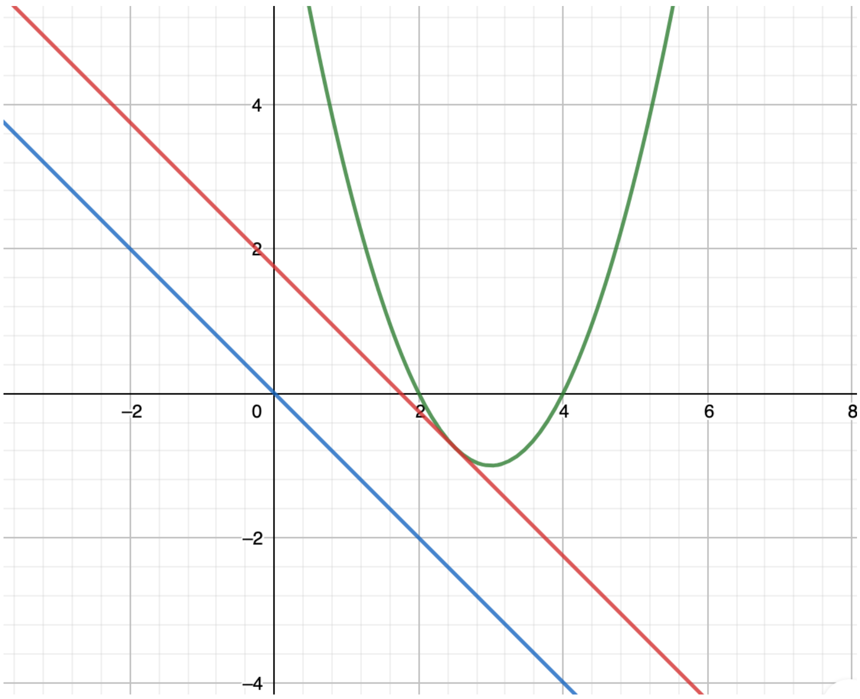
$$f'(x) = 2x - 6$$

$$2x - 6 = -1 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Es decir, el punto de tangencia es $x = \frac{5}{2}$, por tanto, ahora si quieres calcular cual es dicha recta tangente:

$$y = f\left(\frac{5}{2}\right) + f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

La representación seria:



JUNIO 2010 A3.- Estudiar los máximos y los mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - 12x - 8$. Representa la gráfica de la función.

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

Ahora tenemos que calcular la segunda derivada para comprobar si los puntos que han salido de igualar a cero la primera derivada son máximos o mínimos.

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(-2) < 0 \rightarrow MÁXIMO$$

$$f''(2) > 0 \rightarrow MÍNIMO$$

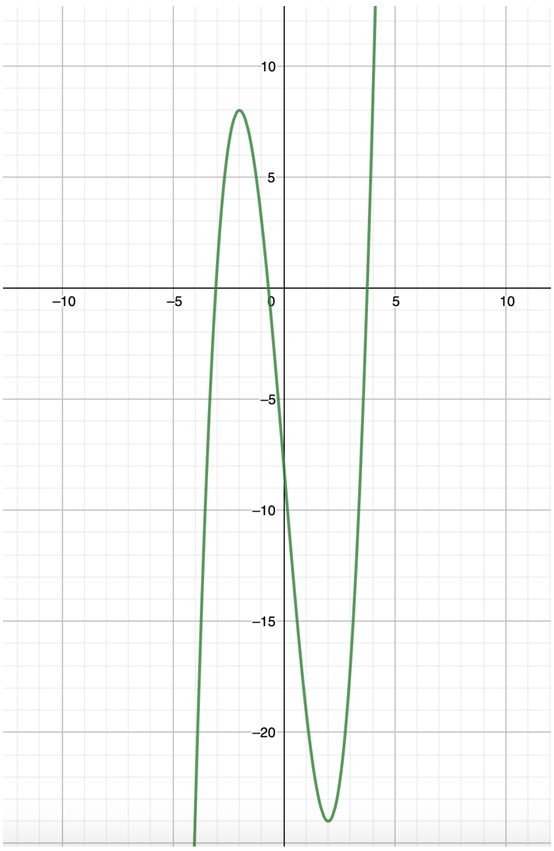
Gracias a saber que puntos son máximos y que puntos son mínimos, podemos determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$(-\infty, -2) \rightarrow intervalo\ creciente$$

$$(-2,2) \rightarrow intervalo\ decreciente$$

$$(2, \infty) \rightarrow intervalo\ creciente$$

Para realizar la representación de la gráfica, podrías calcular también los puntos de corte con los ejes.



JUNIO 2010 B3.- Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$f(x) = 4x^3 - 2x + 1$$

Que son paralelas a la recta $y = 10x + 2$.Estudiar los máximos y los mínimos de la función.

Al ser una recta tangente paralela a la recta $y = 10x + 2\ la\ pendiente\ es\ m = 10$

Recuerda que la derivada de la función es la pendiente:

$$f'(x) = 12x^2 - 2$$

$$f'(x) = m \rightarrow 12x^2 - 2 = 10 \rightarrow x = \pm 1$$

Por tanto, vamos a tener dos rectas tangentes, una en $x = 1\ y\ otra\ x = -1$

Recta tangente en $x = 1$

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

Recta tangente en $x = -1$

$$y = f(-1) + f'(-1)(x + 1)$$

Para saber los máximos y mínimos de la función, igualamos a cero la primera derivada y comprobamos los puntos con la segunda derivada.

$$f'(x) = 12x^2 - 2$$

$$f''(x) = 24x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right) > 0 \rightarrow MINIMO$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{1}{6}}\right) < 0 \rightarrow MAXIMO$$