A2 Y B2 RECTAS Y PLANOS ESPACIO

JULIO 2010 B2 Calcular la distancia del punto $P = (3,2,-1)$ a la recta que pasa por los puntos $A(0,1,2) y\ B = (1,0,2)$.

Describir de forma razona los pasos seguidos para dicho calculo.

Solución: $\sqrt{17}$ YouTube Geometría_1_C2EBAU (https://youtu.be/-q-gluywual)

JULIO 2010 A2 Se consideran los puntos del espacio $A = (4,1,1) y\ B = (2, u, 3)$. Los puntos A y B son simétricos respecto a un plano.

Calcular de forma razonada la ecuación de dicho plano en función de u.

¿Existe algún valor de u para el cual el punto $(0,0,0)$ pertenezca al plano?

Solución: YouTube Geometría_2_C2EBAU (https://youtu.be/ohYiUW0qVW0)

JUNIO 2010 B2 Dado el plano que pasa por los puntos $A = (1,0,2)$,

$B = (0,-1,3) y\ C(a, 2, -4)$ ¿Es posible calcular el valor del parámetro a para que dicho plano contenga al punto $P(-2,3,0)$? En caso afirmativo calcular dicho valor.

JUNIO 2010 A2.-Sean A y B los puntos del espacio, de coordenadas

$$A = (3,4,1 + 2a)\ , B(-3, a, 0).$$

Calcular la ecuación paramétrica de la recta que pasa por A y por B.

Contestar de forma razonada a la siguiente pregunta: ¿Existe algún valor de a para el cual dicha recta contenga al punto $(9,4,6)$?

JUNIO 2011 A2.- Sean r y s las siguientes rectas:

$$r = \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 + 3t \\ z = 0 \end{cases} \quad y \quad s = \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - y = -6 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la recta perpendicular a las rectas r y s y tal que contenga al punto $P = (3, -1,2)$.

JUNIO 2011 B2.- Sea el plano de ecuación $x - y + z = 0$ y sea P el punto $(2,1,3)$.

Calcular el punto simétrico de P respecto del plano, explicando el proceso seguido para dicho calculo.

JULIO 2011 A2.- Hallar las coordenadas del punto simétrico de $A = (0, -1,1)$ con respecto a la recta r dada por

$$\frac{x-5}{2} = y = \frac{z-2}{3}$$

Describir de forma razonada el procedimiento seguido.

JULIO 2011 B2.- Calcular, de manera razonada, la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Y al punto $P = (0,2,5)$

JULIO 2012 A2.- Dados los puntos $A(-1,3,2), B(2, -1, -1)\ y\ C(a-2,7,b)$

- Determinar los valores de los parámetros a y b para que dichos puntos estén alineados.
- Para los valores calculados en el apartado anterior, obtener la ecuación del plano que pasa por el punto $P(0, -3,5)$y es perpendicular al vector AC.

JULIO 2012 B2.- Se consideran los planos

$$3x + 4y + 5z = 0\ , 2x + y + z = 0\ y\ el\ punto\ A(-1,2,1).$$

Halla el plano que pasa por el punto A y por la recta intersección de los planos anteriores.

Calcula un plano que pasa por el punto $B(0,0, -3)$ y que sea paralelo al plano del apartado anterior.

JUNIO 2012 B2.- Se sabe que el plano $x + y + z = 4$ es perpendicular al segmento AB y que lo divide en dos partes iguales. El punto A es $(1,0,0)$

Halla las coordenadas del punto B y calcula la intersección del segmento AB con el plano.

JUNIO 2012 A2.- Dados los puntos $A(1,2,3)\ , B(1, -2,4)\ y\ C(1, -3, a)$:

- Calcular el valor del parámetro a, de tal manera que los tres puntos estén alineados.
- En el caso $a = 5$ hallar la recta que pasa por el origen y que además sea perpendicular al plano que contiene a los puntos.

JUNIO 2013.- Considera la recta r definida por

$$\frac{x-2}{a}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{2}$$

Y el plano $2x-y+bz=0$.

Determinar los valores de a y b en los siguientes casos:

- La recta r es perpendicular al plano
- La recta r esta contenida en el plano.

JUNIO 2013 B2.- Sean $A(2,1,0) y\ el\ plano\ 2x+3y+4z=0$

- Hallar el punto del plano que este a la mínima distancia del punto A.
- Encontrar el punto B simétrico de A respecto al plano

JULIO 2013 A2.- Dados el punto $P(1,0,-2) y\ la\ recta\ definida\ por\ \begin{cases} 2x+y-4z=7 \\ 2x-y=5 \end{cases}$

- Determinar la recta que corta a r, es perpendicular a r y pasa por el punto P.
- Halla la distancia entre el punto P y su simétrico Q respecto de la recta r.

JULIO 2013 B2.- Se consideran los puntos $A=(1,-1,0) y\ B=(2,0,3)$

- ¿Es posible encontrar un plano que sea perpendicular a la recta que une A y B y que además pase por el punto $C=(2,2,3)$?En caso afirmativo hallar la ecuación de dicho plano, en caso negativo razonar la respuesta.
- ¿Es posible encontrar una recta que pasa por A, B y C? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta, en caso negativo razonar la respuesta.

JUNIO 2014 A2.- Dada la recta $r=\begin{cases} 4x-3y+4z=-1 \\ 3x-2y+z=-3 \end{cases} y\ el\ pano\ 2x-y+Az=0$

- Calcular el valor de A para que la recta y el plano sean paralelos.
- Obtener un plano perpendicular a la recta r y que pasa por el origen de coordenadas.

JUNIO 2014 B2.- Calcular las coordenadas de un punto de la recta:

$$r:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$$

Que equidiste de los planos $3x+4y-1=0 \quad y \quad 4x-3y+9=0$

JULIO 2014 A2.- Dado el punto $P(2,-1,3) y\ la\ recta\ r$: $\frac{x}{3}=\frac{y+7}{5}=\frac{z-2}{2}$

- Calcular la proyección del punto P sobre la recta r.
- Calcular la distancia de P a r.
- Obtener el simétrico del punto P respecto a la recta r.

JULIO 2014 B2.- Dada la recta $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+4z=1 \end{cases}$ $y\ el\ plano\ 3x-5y+Az=-31$

- Calcular el valor del parámetro A para que la recta y el plano sean paralelas.
- Para $A=12$ calcular la intersección de la recta y el plano.

JUNIO 2015 A2.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-1,2,3)$ y es paralelo a los vectores $\alpha(-1,-2,-3)\ \ y\ \ \beta(1,3,5)$.

Calcular el valor de m para que el plano calculado en el apartado anterior y el plano $mx-y+5z=8$ sean perpendiculares.

JUNIO 2015 B2.- Encontrar la recta que tiene como vector director el vector $\vec{v}(1,2,3)$ y pasa por el punto P', siendo P' el punto simétrico del punto $P(0,-2,0)$ respecto al plano:

$$\pi: x+3y+z=5$$

JULIO 2015 A2.- Considera los puntos $A(2,1,2)$, $B(0,4,1)$ y la recta de ecuación

$$r \equiv x=y-2=\frac{z-3}{2}$$

Calcular un punto P de la recta que equidiste de los puntos A y B.

Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

JULIO 2015 B2.- Considera los puntos $A(2,1,2), B(0,4,1) y\ la\ recta\ r\ de\ ecuacion$

$$r: x=y-2=\frac{z-3}{2}$$

- Calcular un punto P de la recta que equidiste de los puntos A y B.
- Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A

JUNIO 2016 A2.- Determinar el plano que pasa por el origen de coordenadas, es paralelo a la recta de ecuación

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$$

Y también es paralelo a la recta que pasa por los puntos $(0,1,1)\ \ y\ \ (1,1,0)$.

JUNIO 2016 B2.- Dado el plano $x-3y+2z=7$

Determina el punto simétrico del $(3,-8,4)$ respecto a dicho plano.

Calcular la distancia entre los dos puntos simétricos.

JULIO 2016 A2.- Calcular la distancia del punto A de coordenadas $(4,4,3)$ al plano que pasa por los puntos de coordenadas $B(1,1,0), C(1,0,1)\ \ y\ \ D(0,1,1)$.

JULIO 2016 B2.- Sea r la recta que pasa por los puntos $P(1,2,3)\ y\ Q(-1,0,1)$

a) Determina la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por el punto $A(4,-2,-1)$
b) Determina la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por el punto $B(2,1,-3)$
c) Calcular la distancia que hay entre ambos planos.

JUNIO 2017 A2.- Dado el punto $M(1,-3,7)$, obtener su simétrico respecto a la recta que pasa por los puntos $A(1,-3,4)\ \ y\ \ B(0,-4,1)$.

JUNIO 2017 B2.- Calcula la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la recta

$$r{:}\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{3}$$

Y que pasa por el punto $A(14,3,3)$.

JULIO 2017 A2.- Dada la recta que pasa por los puntos $A(0,2,3) y\ B(-1,1,1)$ encontrar un punto P de dicha recta tal que la distancia de P al punto M$(1,0,1)$sea la misma que la distancia de P al punto N$(0,4,2)$

JULIO 2017 B2.- Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a los planos de ecuaciones

$$x-3y+z=0 \qquad y \qquad 2x-y+3z-5=0$$

Y que pase por el punto $P(2,6,5)$

Encontrar la distancia del primer plano a la recta obtenida.

JUNIO 2018 A2.- Dados los puntos $A(3,3,3), B(2,3,4), C(0,0,4) y\ D(3,0,1)$

- ¿Están en el mismo plano? En caso afirmativo hallar la ecuación del plano. En caso negativo razonar la respuesta.
- Calcular a para que el punto $P(a,a,8)$ este en la recta que pasa por los puntos A y C.

JUNIO 2018 B2.- Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $P(2,-1,2) y\ a\ la\ recta$

$$r: \frac{x}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-1}$$

JULIO 2018 A2.- Sea el plano de ecuación $x+y+z=1$ sea la recta de ecuaciones paramétricas r:$\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ y sea el punto P$(1,1,0)$

- Hallar la ecuación del plano perpendicular a r y que contenga a P.
- Hallar el punto simétrico de P respecto al plano.

JULIO 2018 B2.- Determina el punto simétrico de $A(-3,1,-7)$respecto a la recta de ecuación paramétricas.

$$r: \begin{cases} x=-1+t \\ y=3+2t \\ z=-1+2t \end{cases}$$

JUNIO 2019 A2.- Sean la recta

$$r: \begin{cases} 4x-3y+4z=1 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases} \quad y\ el\ plano\ x-y+Az=0$$

- ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a r?
- Encontrar el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(0,0,0)$

JUNIO 2019 B2.- Se consideran los tres puntos $A(0,0,1), B(1,1,1) y\ C(-1,-1,2)$. ¿Están alineados? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo calcular el plano que los contiene.

JULIO 2019 A2.- Hallar la ecuación de una recta paralela al plano $x+2y+3z=6$ y que contenga al punto $P(1,0,0)$. ¿Es única dicha recta? Razonar la respuesta.

JULIO 2019 B2.- Se considera la recta r

$$r: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$$

Y el punto $P(1,2,5)$ exterior a la misma. Hallar la ecuación del plano que contiene a r y a P.

JUNIO 2020 A2.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-1,2,3) y\ es\ paralela\ a\ los\ vectores\ (-1,-2,-3) y\ (1,3,5)$

Hallar el valor de A para que le plano calculado en el apartado anterior y $Ax-y+5z=8$ sean perpendiculares.

JUNIO 2020 B2.- Sea el plano $2x-y+Az=0$. Sea r la recta dada por $\begin{cases} 4x-3y+4z=-1 \\ 3x-2y+z=-3 \end{cases}$
Hallar A para que r y el plano sean paralelos. Además, obtener el plano perpendicular a r y que pase por el origen.

JULIO 2020 A2.- Dada la recta

$$r=\begin{cases} 3x+y-z=2 \\ 2x+y+4z=1 \end{cases} y\ el\ plano\ 3x+(a+1)(y+1)+az=1$$

- Hallar a para que la recta y el plano sean paralelos.
- Determinar si el punto $P(1,1,2)$ pertenece al plano hallado en el apartado anterior.

JULIO 2020 B2.- Hallar el punto Q, simétrico de

$P=(1,2,3)\ respecto\ al\ plano\ de\ ecuacion\ x+y+z=0$, explicando los pasos seguidos para su calculo.

SOLUCIONES

JULIO 2010 B2 Calcular la distancia del punto $P = (3,2,-1)$ a la recta que pasa por los puntos $A(0,1,2) y\ B = (1,0,2)$.

Describir de forma razona los pasos seguidos para dicho calculo.

Lo primero que tenemos que hacer es crear la recta que pasa por el punto A y B:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,-1,0)$$

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$$

Ahora para poder calcular la distancia entre la recta y el punto, podemos utilizar la formula, para eso la recta tiene que estar expresada en su forma general. En esta ocasión, vamos a utilizar el procedimiento, donde entendemos lo que se pide y lo que necesitamos:

Tenemos que crear el plano con el punto P y como vector normal, el director de la recta, es decir;

$$P(3,2,-1)\ y\ \vec{n} = (1,-1,0) \rightarrow 1(x-3) - 1(y-2) + 0(z+1) = 0$$

$$x - y - 1 = 0 \rightarrow Este\ es\ el\ plano.$$

Ahora vamos a calcular la intersección de la recta con el plano, porque la distancia entre la recta y el punto P es lo mismo que la distancia del punto P al punto de intersección (recta y plano).

$$interseccion\ recta\ y\ plano \rightarrow t - (1-t) - 1 = 0 \rightarrow t = 1$$

$$Punto\ de\ interseccion \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$distancia\ (P, Pi) = \sqrt{(1-3)^2 + (0-2)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$$

JULIO 2010 A2 Se consideran los puntos del espacio $A = (4,1,1) y\ B = (2, u, 3)$. Los puntos A y B son simétricos respecto a un plano.

Calcular de forma razonada la ecuación de dicho plano en función de u.

¿Existe algún valor de u para el cual el punto $(0,0,0)$ pertenezca al plano?

El plano que queremos o tenemos que crear es perpendicular a la recta, por tanto, el vector normal del plano es el director de la recta $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-2, u-1,2)$

Un punto del plano puede ser el punto medio entre A y B, ya que, al ser simétricos respecto del plano el punto medio debe de pertenecer al plano:

$$PM = \frac{(4,1,1) + (2,u,3)}{2} = (3, \frac{1+u}{2}, 2)$$

Ahora con el punto medio y el vector normal creamos el plano con la siguiente ecuación:

$$A(x - x_o) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$-2(x-3) + (u-1)\left(y - \frac{1+u}{2}\right) + 2(z-2) = 0$$

Ahora para que el punto $(0,0,0)$ pertenezca al plano debe de cumplir la ecuación del plano:

$$-2(0-3) + (u-1)\left(0 - \frac{1+u}{2}\right) + 2(0-2) = 0$$

$$6 - \frac{u^2-1}{2} - 4 = 0 \rightarrow 12 - u^2 + 1 - 8 = 0 \rightarrow u^2 = 5 \rightarrow u = \pm\sqrt{5}$$

JUNIO 2010 B2 Dado el plano que pasa por los puntos $A = (1,0,2)$,

$B = (0,-1,3) y\ C(a,2,-4)$ ¿Es posible calcular el valor del parámetro a para que dicho plano contenga al punto $P(-2,3,0)$? En caso afirmativo calcular dicho valor.

Primero tenemos que calcular el plano que pasa por esos tres puntos:

$$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (a-1,2,-6)$$

Ahora para calcular el vector normal tenemos que hacer el siguiente procedimiento:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ a-1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 4i + (a-7)j + (a-3)k \rightarrow (4, a-7, a-3)$$

$$A(x-x_o) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

$$4(x-1) + (a-7)(y-0) + (a-3)(z-2) = 0$$

$$4x - 4 + ay - 7y - 3z + 6 + az - 2a = 0$$

Para que el punto P pertenezca al plano debe de cumplir la ecuación de este, es decir,

$$4(-2) - 4 + a(3) - 7(3) - 3(0) + 6 + a(0) - 2a = 0 \rightarrow$$

$$-8 - 4 + 3a - 21 + 6 - 2a = 0 \rightarrow a = 27$$

JUNIO 2010 A2.-Sean A y B los puntos del espacio, de coordenadas

$$A = (3{,}4{,}1 + 2a)\,, B(-3, a, 0).$$

Calcular la ecuación paramétrica de la recta que pasa por A y por B.

Contestar de forma razonada a la siguiente pregunta: ¿Existe algún valor de a para el cual dicha recta contenga al punto $(9{,}4{,}6)$?

$$\overrightarrow{AB} = (-6, a - 4, -1 - 2a)$$

Ahora escribimos la recta en forma paramétrica:

$$r{:}\begin{cases} x = -3 - 6t \\ y = a + (a - 4)t \\ z = +(-1 - 2a)t \end{cases}$$

Para que el punto pertenezca a la recta:

$$\begin{array}{c} 9 = -3 - 6t \\ 4 = a + (a - 4)t \\ 6 = +(-1 - 2a)t \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} t = -2 \\ 4 = a - 2a + 8 \rightarrow a = 4 \\ 6 = \big(-1 - 2(4)\big)(-2) \rightarrow no\ se\ cumple. \end{array}$$

No existe un valor de a que haga que el punto pertenezca a la recta.

JUNIO 2011 A2.- Sean r y s las siguientes rectas:

$$r = \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 + 3t \\ z = 0 \end{cases} \quad y \quad s = \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - y = -6 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la recta perpendicular a las rectas r y s y tal que contenga al punto

$P = (3, -1{,}2)$.

Lo primero debes de calcular los vectores directores de la recta r y la recta s:

$$\overrightarrow{d_r} = (1{,}3{,}0)$$

$$\vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 2\vec{k} \rightarrow (-2,-2,-2) \rightarrow (1{,}1{,}1)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k} \rightarrow (3, -1, -2)$$

$$A(x - x_o) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$3(x - 3) - 1(y + 1) - 2(z - 2) = 0 \rightarrow 3x - y - 2z - 6 = 0$$

JUNIO 2011 B2.- Sea el plano de ecuación $x - y + z = 0$ y sea P el punto $(2,1,3)$.

Calcular el punto simétrico de P respecto del plano, explicando el proceso seguido para dicho calculo.

Lo primero que debemos hacer es crear la recta que es perpendicular al plano, es decir, $\overrightarrow{d_r} = \vec{n}$

Y que pase por el punto P:

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Cuando ya tenemos la recta creada, debemos calcular el punto de intersección que actuara como punto medio, en los próximos cálculos:

$$2 + t - (1 - t) + 3 + t = 0 \rightarrow 2 + t - 1 + t + 3 + t = 0 \rightarrow 4 + 3t = 0 \rightarrow t = -\frac{4}{3}$$

El punto de intersección: $\begin{cases} x = 2 - \frac{4}{3} \\ y = 1 + \frac{4}{3} \\ z = 3 - \frac{4}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{7}{3} \\ z = \frac{5}{3} \end{cases}$

Como ya te he dicho anteriormente, el punto de intersección actúa como punto medio en los siguientes cálculos:

Si queremos calcular el punto simétrico de P respecto del punto medio:

$$PM = \frac{P + P'}{2} \rightarrow P' = 2PM - P \rightarrow P' = 2\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right) - (2,1,3) \rightarrow P' = \left(\frac{-2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

JULIO 2011 A2.- Hallar las coordenadas del punto simétrico de $A = (0, -1, 1)$ con respecto a la recta r dada por

$$\frac{x-5}{2} = y = \frac{z-2}{3}$$

Describir de forma razonada el procedimiento seguido.

Lo primero que debemos de hacer es crear el plano que es perpendicular a la recta, es decir, $\vec{n} = \overrightarrow{d_r}$ y para por el punto A:

$$A(x - x_o) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$2(x - 0) + 1(y + 1) + 3(z - 1) = 0 \to 2x + y + 3z - 2 = 0$$

Ahora debemos de calcular el punto de intersección entre la recta del enunciado y el plano que hemos creado, pero para eso, la recta debe de estar en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

$$2(5 + 2t) + t + 3(2 + 3t) - 2 = 0 \to$$

$$10 + 4t + t + 6 + 9t - 2 = 0 \to 14t + 14 = 0 \to t = -1$$

El punto de intersección $\to \begin{cases} x = 5 + 2(-1) \\ y = -1 \\ z = 2 + 3(-1) \end{cases} \to \begin{matrix} x = 3 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{matrix}$

Ahora que ya tenemos el punto de intersección, lo utilizaremos como el punto medio para hallar el punto simétrico de A con respecto a la recta:

$$PM = \frac{P + P'}{2} \to P' = 2PM - P \to P' = 2(3, -1, -1) - (0, -1, 1) \to P' = (6, -1, -3)$$

JULIO 2011 B2.- Calcular, de manera razonada, la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Y al punto $P = (0,2,5)$

Si una recta esta contenida en el plano eso quiere decir que el punto de la recta esta dentro del plano, entonces con el punto de la recta y el punto P podemos crear un vector que este contenido en el plano:

$$P_r = (1,2,3)$$

$$\overrightarrow{PP_r} = (1,0,-2)$$

Ahora, con este vector y el vector director de la recta $\overrightarrow{d_r} = (1,-1,2)$ podemos crear el vector normal del plano.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2,-4,-1)$$

Con este vector normal del plano y el punto P podemos crear la ecuación del plano en su forma general:

$$A(x - x_o) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$-2(x - 0) - 4(y - 2) - 1(z - 5) = 0$$

$$-2x - 4y - z + 13 = 0$$

JULIO 2012 A2.- Dados los puntos $A(-1,3,2), B(2,-1,-1)\ y\ C(a-2,7,b)$

- Determinar los valores de los parámetros a y b para que dichos puntos estén alineados.
- Para los valores calculados en el apartado anterior, obtener la ecuación del plano que pasa por el punto $P(0,-3,5)$ y es perpendicular al vector AC.

Para que tres puntos estén alineados, los vectores tienen que ser proporcionales:

$$\overrightarrow{AB} = (3,-4,-3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (a-1,4,b-2)$$

Ahora para que estén alineados, se tiene que cumplir lo siguiente:

$$\frac{a-1}{3} = \frac{4}{-4} = \frac{b-2}{-3} \rightarrow$$

$$\frac{a-1}{3} = \frac{4}{-4} \rightarrow a-1 = -3 \rightarrow a = -2$$

$$\frac{4}{-4} = \frac{b-2}{-3} \rightarrow b-2 = 3 \rightarrow b = 5$$

Ahora con el vector que hemos creado $\overrightarrow{AC}$ y sustituyendo los valores de a y b que hemos calculado, vamos a crear un plano con dicho vector y el punto P.

$$\overrightarrow{AC} = (-3,4,3)$$

$$P(0,-3,5)$$

El plano, al ser perpendicular a la dirección $\overrightarrow{AC}$ actúa como vector normal del plano:

$$A(x-x_o) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

$$-3(x-0) + 4(y+3) + 3(z-5) = 0$$

$$-3x + 4y + 3z - 3 = 0$$

JUNIO 2012 B2.- Se sabe que el plano $x + y + z = 4$ es perpendicular al segmento AB y que lo divide en dos partes iguales. El punto A es $(1,0,0)$

Halla las coordenadas del punto B y calcula la intersección del segmento AB con el plano.

Como el plano es perpendicular a la recta AB eso quiere decir que el vector director de la recta coincide con el vector normal del plano.

También conocemos un punto de la recta, el punto A, por tanto, podemos crear la recta perpendicular al plano y que pasa por A.

$$\overrightarrow{d_r} = (1,1,1) = \vec{n}$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Sabiendo cual es la recta, ahora tenemos que calcular la intersección de la recta con el plano, de esta forma obtendremos el punto medio del segmento AB.

$$1 + t + t + t = 4 \rightarrow 3t = 3 \rightarrow t = 1$$

$$El\ punto\ de\ interseccion \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Sabiendo el punto de intersección, que además actúa como punto medio, podemos calcular B , ya que es el punto simétrico de A respecto del punto de intersección (punto medio).

$$PM = \frac{P + P'}{2} \rightarrow P' = 2PM - P \rightarrow P' = 2(2,1,1) - (1,0,0) \rightarrow P' = (3,2,2)$$

JUNIO 2012 A2.- Dados los puntos $A(1,2,3)$, $B(1,-2,4)$ y $C(1,-3,a)$:

- Calcular el valor del parámetro a, de tal manera que los tres puntos estén alineados.
- En el caso $a = 5$ hallar la recta que pasa por el origen y que además sea perpendicular al plano que contiene a los puntos.

Para que tres puntos estén alineados se tiene que cumplir que los vectores sean perpendiculares:

$$\overrightarrow{AB} = (0,-4,1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0,-5,a-3)$$

Ahora comprobamos si son proporcionales:

$$\frac{0}{0} = \frac{-4}{-5} = \frac{1}{a-3}$$

$$\frac{-4}{-5} = \frac{1}{a-3} \rightarrow -4a + 12 = -5 \rightarrow -4a = -17 \rightarrow a = \frac{17}{4}$$

Ahora tenemos que crear una recta que sea perpendicular al plano que crean los puntos cuando $a = 5$

Para ello tenemos que calcular el vector normal del plano que sea el vector director de la recta:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} = (-3,0,0)$$

Con este vector y el origen de coordenadas, creamos la recta:

$$r: \begin{cases} x = -3t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

JUNIO 2013.- Considera la recta r definida por

$$\frac{x-2}{a}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{2}$$

Y el plano $2x-y+bz=0$.

Determinar los valores de a y b en los siguientes casos:

- La recta r es perpendicular al plano
- La recta r esta contenida en el plano.

Cuando la recta y el plano son perpendiculares, esto quiere decir que sus vectores, el vertor director de la recta y el vector normal del plano son paralelos, por tanto, tienen que ser proporcionales, es decir,

$$\vec{d_r}=(a,4,2)$$

$$\vec{n}=(2,-1,b)$$

Para que sean perpendiculares recta y plano:

$$\frac{a}{2}=\frac{4}{-1}=\frac{2}{b}$$

$$\frac{a}{2}=\frac{4}{-1}\rightarrow -a=8\rightarrow a=-8$$

$$\frac{4}{-1}=\frac{2}{b}\rightarrow 4b=-2\rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

Para que la recta este contenida en el plano, los vectores, vector normal del plano y el vector director de la recta deben de ser perpendiculares, por tanto, se debe cumplir que la multiplicación escalar de dichos vectores sea cero:

$$\vec{d_r}=(a,4,2)$$

$$\vec{n}=(2,-1,b)$$

$$\vec{d_r}\cdot\vec{n}=0\rightarrow (a,4,2)\cdot\ (2,-1,b)=0\rightarrow 2a-4+2b=0\rightarrow a=2-b$$

A esto tenemos que añadir que si la recta esta contenida en el plano, el punto de la recta debe de cumplir la ecuación del plano, por tanto,

$$P(2,1,-1)$$

$$2x-y+bz=0$$

$$Introducimos\ el\ punto\ en\ el\ plano\rightarrow 2(2)-(1)+b(-1)=0\rightarrow b=3$$

Sabiendo que $b=3\rightarrow a=-1$

JUNIO 2013 B2.- Sean $A(2,1,0) y\ el\ plano\ 2x+3y+4z=0$

- Hallar el punto del plano que este a la mínima distancia del punto A.
- Encontrar el punto B simétrico de A respecto al plano

Para hallar el punto que esta a la mínima distancia, lo primero que vamos a hacer, es crear la recta perpendicular al plano que pasa por el punto A. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de la recta es igual al vector normal del plano, es decir,

$$\vec{d}_r = \vec{n}$$

$$\vec{d}_r = (2,3,4)$$

Por tanto, la recta que debemos crear es:

$$r: \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+3t \\ z = 4t \end{cases}$$

Ahora debemos de calcular el punto de intersección de la recta con el plano, ya que este punto será el punto que esta a la mínima distancia de A.

Para hacer la intersección de la recta y el plano, debemos introducir la ecuación de la recta en el plano:

$$2(2+2t)+3(1+3t)+4(4t)=0 \rightarrow 4+4t+3+9t+16t=0 \rightarrow t=\frac{-7}{29}$$

Ahora con la t calculada, somos capaces de determinar el punto de intersección:

$$Pi \rightarrow \begin{cases} x = 2+2\frac{-7}{29} \\ y = 1+3\frac{-7}{29} \\ z = 4\frac{-7}{29} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{44}{29} \\ y = \frac{8}{29} \\ z = \frac{-28}{29} \end{cases}$$

Sabiendo el punto de intersección, que además actúa como punto medio, podemos calcular B, ya que es el punto simétrico de A respecto del punto de intersección (punto medio).

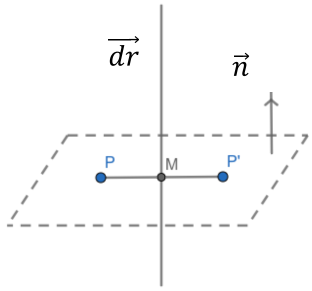
$$PM = \frac{P+P'}{2} \rightarrow P' = 2PM - P \rightarrow P' = 2\left(\frac{44}{29},\frac{8}{29},\frac{-28}{29}\right) - (2,1,0) \rightarrow P' = \left(\frac{30}{29},\frac{-13}{29},\frac{-56}{29}\right)$$

JULIO 2013 A2.- Dados el punto $P(1,0,-2) y\ la\ recta\ definida\ por \begin{cases} 2x+y-4z=7 \\ 2x-y=5 \end{cases}$

- Determinar la recta que corta a r, es perpendicular a r y pasa por el punto P.
- Halla la distancia entre el punto P y su simétrico Q respecto de la recta r.

Para poder crear una recta que sea perpendicular a r y pase por el punto P tenemos que hacer el siguiente planteamiento.

Tenemos que crear el plano que es perpendicular a la recta que nos dan en el enunciado. Para eso, sabiendo el vector director de la recta que es paralelo al vector normal del plano que queremos crear y que por tanto son proporcionales, podemos utilizar como vector normal, el director de la recta.



Para hallar el vector normal, es decir, el director de la recta tenemos que hacer la siguiente operación, ya que la recta nos la dan en su forma implícita.

$$\overrightarrow{d_r} = \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} - 4\vec{k} \to (-4,-8,-4) \to (1,2,1)$$

Ahora, como ya sabemos el vector normal y el punto por el que pasa el plano;

$$A(x-x_o) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

$$1(x-1) + 2(y-0) + 1(z+2) = 0 \to x+2y+z+1 = 0$$

Sabiendo cual es el plano, calculamos el punto de intersección. Con el punto P y el punto de intersección podremos crear finalmente la recta que es perpendicular a la recta que nos dan y que pase por el punto P.

Para la intersección, necesitamos la recta en paramétricas y el plano en su ecuación general:

Para poder representar la recta en su ecuación paramétrica necesitamos un punto, ya que el vector director ya lo hemos calculado. Le damos un valor a una de las incógnitas (x,y,z). En este caso $y=1$

$$\begin{cases} 2x+y-4z=7 \\ 2x-y=5 \end{cases} \to \begin{cases} 2x+y-4z=7 \\ 2x-1=5 \end{cases} \to 2x=6 \to x=3$$

$$2x+y-4z=7 \to 2(3)+1-4z=7 \to z=0$$

El punto de la recta es $(3,1,0)$ con este punto y el vector director $\overrightarrow{d_r} = (1,2,1) \to \begin{cases} x=3+t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}$

Hacemos la intersección:

$$plano \rightarrow\ x+2y+z+1=0.\ \ recta \rightarrow \begin{cases} x=3+t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}$$

$$3+t+2(1+2t)+t+1=0 \rightarrow 3+t+2+4t+t+1=0 \rightarrow 6t=-6 \rightarrow t=-1$$

Sabiendo el valor de $t, \rightarrow el\ punto\ de\ intersección \rightarrow \begin{cases} x=3-1 \\ y=1+2(-1) \rightarrow M(2,-1,-1) \\ z=-1 \end{cases}$

Finalmente sabiendo el punto de intersección, creamos la recta:

$$vector \rightarrow \overrightarrow{PM}=(2,-1,-1)-(1,0,-2)=(1,-1,1)$$

La recta; $\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=-2+t \end{cases}$

Para hacer el siguiente apartado tenemos muchos cálculos avanzados, solo tenemos que calcular el simétrico de P respecto de la recta, en este caso respecto de M:

$$P'=2M-P \rightarrow P'=(4,-2,-2)-(1,0,-2)=(3,-2,0)$$

La distancia entre dos puntos es el modulo del vector que se crea con ellos:

$$\overrightarrow{PP'}=(3,-2,0)-(1,0,-2)=(2,-2,2)$$

$$\left|\overrightarrow{PP'}\right|=\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{12}u$$

JULIO 2013 B2.- Se consideran los puntos $A = (1, -1,0) y\ B = (2,0,3)$

- ¿Es posible encontrar un plano que sea perpendicular a la recta que une A y B y que además pase por el punto $C = (2,2,3)$?En caso afirmativo hallar la ecuación de dicho plano, en caso negativo razonar la respuesta.
- ¿Es posible encontrar una recta que pasa por A, B y C? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta, en caso negativo razonar la respuesta.

Si, es posible crear un plano que sea perpendicular a la recta creada con los puntos A, B y que además pase por el punto C.

Lo primero que tienes que hacer es el calculo del vector $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,0,3) - (1, -1,0) = (1,1,3)$

Cuando tienes el vector creado tienes que entender lo siguiente: al ser perpendiculares la recta y el plano, sus vectores (director y normal) son paralelos, es decir, proporcionales, por tanto, con el vector $\overrightarrow{AB}\ y\ el\ punto\ C$ creamos el plano que nos piden:

$$A(x - x_o) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$1(x - 2) + 1(y - 2) + 3(z - 3) = 0 \rightarrow x + y + 3z - 13 = 0$$

Para comprobar el segundo apartado, tenemos varios procedimientos, en este caso, voy a crear el vector $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$ para que estos tres puntos estén alineados, estos dos vectores tienen que ser proporcionales:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,0,3) - (1, -1,0) = (1,1,3)$$

$$\overrightarrow{AC} = B - C = (2,0,3) - (2,2,3) = (0, -2,0)$$

Como los vectores, a la vista esta, no son proporcionales, los puntos A, B y C no forman una recta.

Otra forma hubiese sido, crear la recta que pasa por los puntos A y B, después comprobar si el punto C pertenece o no a la recta.

JUNIO 2014 A2.- Dada la recta $r = \begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$ $y\ el\ pano\ 2x - y + Az = 0$

- Calcular el valor de A para que la recta y el plano sean paralelos.
- Obtener un plano perpendicular a la recta r y que pasa por el origen de coordenadas.

Para que la recta y el plano sean paralelos, los vectores, tanto de la recta como del plano tienen que formar un ángulo de noventa grados, es decir, sean perpendiculares. Esto explicado analíticamente seria:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{d_r} = 0$$

Para determinar el vector director de la recta tienes que hacer unos cálculos previos ya que la recta nos la dan expresada como intersección de dos planos, por tanto,

$$\overrightarrow{dr} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} + \vec{k} \to (5,8,1)$$

Ahora ya podemos comprobar si son paralelos o no la recta y el plano.

$$(5,8,1) \cdot (2,-1,A) = 0 \to 10 - 8 + A = 0 \to A = -2$$

Para la segunda parte del ejercicio necesitamos el vector director de la recta de la recta que actuar como vector normal del plano, ya que son perpendiculares y los vectores son proporcionales:

$$\vec{n} = \overrightarrow{d_r} = (5,8,1); P(0,0,0)$$

$$A(x - x_o) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$5(x - 0) + 8(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \to 5x + 8y + 1z = 0$$

JUNIO 2014 B2.- Calcular las coordenadas de un punto de la recta:

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$$

Que equidiste de los planos $3x + 4y - 1 = 0 \quad y \quad 4x - 3y + 9 = 0$

PON EN PRACTICA LO QUE HAS APRENDIDO.

EN EL EJERCICIO JULIO 2015 A2 TIENES UN PROCEDIMIENTO EXACTAMENTE IGUAL, PERO CON OTRA INFORMACIÓN, INTENTALO. RECUERDA, EN ESTA OCASIÓN ES LA DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN PLANO.

SI NO ERES CAPAZ DE LLEGAR A LA SOLUCIÓN, TE DEJO AQUÍ MI CONTACTO, ME ESCRIBES Y TE AYUDO: 688-820-933

SOLUCION:

$$A(4,2,4) \qquad B\left(\frac{-8}{17}, \frac{-80}{17}, \frac{-8}{17}\right)$$

JULIO 2014 A2.- Dado el punto $P(2,-1,3) y\ la\ recta\ r: \frac{x}{3} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-2}{2}$

- Calcular la proyección del punto P sobre la recta r.
- Calcular la distancia de P a r.
- Obtener el simétrico del punto P respecto a la recta r.

Lo primero que vamos a hacer es crear el plano que pasa por P y que tiene como vector normal el vector director de la recta. Recuerda que este procedimiento lo tienes perfectamente detallado en el esquema que tienes en este mismo bloque:

$$\vec{n} = \overrightarrow{d_r} = (3,5,2)$$

$$A(x - x_o) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$3(x-2) + 5(y+1) + 2(z-3) = 0 \rightarrow 3x + 5y + 2z - 7 = 0$$

Ahora con la intersección de la recta y el plano, estaremos dando solución al primer apartado, para eso la recta tiene que estar en su forma paramétrica y la ecuación del plano en su forma general.

$$r \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = -7 + 5t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

$$3x + 5y + 2z - 7 = 0$$

Ahora introducimos la recta en el plano;

$$3(3t) + 5(-7 + 5t) + 2(2 + 2t) - 7 = 0 \rightarrow 9t - 35 + 25t + 4 + 4t - 7 = 0 \rightarrow$$

$$38t - 38 = 0 \rightarrow t = 1$$

Sabiendo cual es el valor de t podemos saber cual es el punto de intersección introduciendo este valor de t en la ecuación de la recta:

$$P.Intersección \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases}, proyeccion\ P\ sobre\ la\ recta$$

Ahora, en el segundo apartado, la distancia entre P y la recta:

$$P(2,-1,3) \quad Pi(3,-2,4)$$

$$D(P,r) = D(P,Pi) = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-(-1))^2 + (4-3)^2} = \sqrt{3}\ u$$

Finalmente, para obtener el simétrico de P respecto de la recta, lo haremos con la siguiente ecuación:

$$P' = 2Pi - P \rightarrow P' = 2(3,-2,4) - (2,-1,3) = (4,-3,5)$$

JULIO 2014 B2.- Dada la recta $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases}$ $y\ el\ plano\ 3x - 5y + Az = -31$

- Calcular el valor del parámetro A para que la recta y el plano sean paralelas.
- Para $A = 12$ calcular la intersección de la recta y el plano.

Para que la recta y el plano sean paralelos, los vectores, tanto de la recta como del plano tienen que formar un ángulo de noventa grados, es decir, sean perpendiculares. Esto explicado analíticamente seria:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{d_r} = 0$$

Para determinar el vector director de la recta tienes que hacer unos cálculos previos ya que la recta nos la dan expresada como intersección de dos planos, por tanto,

$$\overrightarrow{dr} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 7\vec{j} - 1\vec{k} \to (-3, -7, -1)$$

Ahora ya podemos comprobar si son paralelos o no la recta y el plano.

$$(-3, -7, -1) \cdot (3, -5, A) = 0 \to -9 + 35 - A = 0 \to A = 26$$

En el siguiente apartado, para calcular la intersección entre la recta y el plano, tenemos que expresar la ecuación de la recta en su forma paramétrica y la ecuación del plano en su forma continua. En este caso, la recta nos la dan expresada como intersección de dos planos, por tanto:

$$\overrightarrow{dr} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 7\vec{j} - 1\vec{k} \to (-3, -7, -1)$$

Y para sacar el punto, debemos de darle un valor a una de las incógnitas para después resolver un sistema. Diremos que $z = 0$, entonces:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases} \to z = 0 \to \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \to Con\ reducción \to x = -1$$

Sabiendo que $x = -1\,, z = 0 \to -1 - y = 1 \to y = -2$

El punto de la recta es$(-1, -2, 0)$

Por tanto, la ecuación de la recta en forma paramétrica será: $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = -2 - 7t \\ z = -t \end{cases}$

Ahora hacemos la intersección de la recta con el plano, introduciendo la recta en el plano y calculando el parámetro t.

$$3x - 5y + Az = -31 \rightarrow A = 12 \rightarrow 3x - 5y + 12z = -31$$

$$3(-1 - 3t) - 5(-2 - 7t) + 12(-t) = -31 \rightarrow$$

$$-3 - 9t + 10 + 35t - 12t = -31 \rightarrow 14t = -38$$

JUNIO 2015 A2.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-1,2,3)$ y es paralelo a los vectores $\alpha(-1,-2,-3)\ \ y\ \ \beta(1,3,5)$.

Calcular el valor de m para que el plano calculado en el apartado anterior y el plano $mx - y + 5z = 8$ sean perpendiculares.

El plano al ser paralelo a los dos vectores que el enunciado nos proporciona, tenemos que hacer la multiplicación vectorial para determinar el vector perpendicular.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -1\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 1\vec{k} \rightarrow (-1,2,-1)$$

Y ahora, con este vector, que hace de vector normal y el punto P, creamos el plano:

$$A(x - x_o) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$-1(x + 1) + 2(y - 2) - 1(z - 3) = 0 \rightarrow -1x + 2y - 1z - 2 = 0$$

Para que dos planos sean perpendiculares, la multiplicación escalar entre sus vectores normales tiene que ser cero, ya que forman un ángulo de 90 grados.

$$(-1,2,-1) \cdot (m,-1,5) = 0$$

$$-m - 2 - 5 = 0 \rightarrow m = -7$$

JUNIO 2015 B2.- Encontrar la recta que tiene como vector director el vector $\vec{v}(1,2,3)$ y pasa por el punto P', siendo P' el punto simétrico del punto $P(0,-2,0)$ respecto al plano:

$$\pi: x+3y+z=5$$

CON LA TEORIA Y TODOS LOS EJERCICIOS QUE YA LLEVAMOS HECHOS DEBERIAS DE SER CAPAZ DE PLANTEAR EL ENUNCIADO, POR TANTO, TE DEJO LAS SOLUCIONES SIN EL PROCEDIMIENTO PARA QUE PUEDAS COMPROBAR QUE LO HACES BIEN.

SI TIENES DUDAS, ESCRIBEME Y TE LAS RESOLVERE 688-820-933

LA RECTA PERPENDICULAR AL PLANO Y QUE PASA POR P:

$$\begin{cases} x=t \\ y=-2+3t \\ z=t \end{cases}$$

EL PUNTO DE INTERSECCION ENTRE LA RECTA Y EL PLANO:

$$t=1 \rightarrow punto\ de\ interseccion \rightarrow (1,1,1)$$

EL PUNTO SIMÉTRICO DE P RESPECTO DEL PUNTO DE INTERSECCIÓN $\rightarrow P' = 2Pi - P \rightarrow (2,4,2)$

LA RECTA QUE PIDE EL EJERCICIO$\rightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=4+2t \\ z=2+3t \end{cases}$

JULIO 2015 A2.- Considera los puntos $A(2,1,2)$, $B(0,4,1)$ y la recta de ecuación

$$r \equiv x = y - 2 = \frac{z-3}{2}$$

Calcular un punto P de la recta que equidiste de los puntos A y B.

Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

La idea es calcular un punto general de la recta r.

$$(x, y, z) = (t, 2+t, 3+2t)$$

Teniendo el punto general de la recta, tenemos que calcular la distancia entre dicho punto general y el punto A y el punto B.

$$Dist(A, PG) = \sqrt{(t-2)^2 + (1+t)^2 + (1+2t)^2}$$

$$Dist(B, PG) = \sqrt{(t)^2 + (t-2)^2 + (2+2t)^2}$$

Ahora igualamos las distancias, ya que, al ser equidistantes, tienen que ser iguales, de esta forma determinaremos el valor del parámetro t.

$$Dist(A, PG) = Dist(B, PG)$$

$$\sqrt{(t-2)^2 + (1+t)^2 + (1+2t)^2} = \sqrt{(t)^2 + (t-2)^2 + (2+2t)^2}$$

$$t = -1$$

Sabiendo el valor del parámetro t podemos calcular cual es el punto de la recta que equidista del punto A y B:

$$P(-1,1,1)$$

En el segundo apartado, nos pide calcular el plano perpendicular a la recta, con lo que, el vector normal y el vector director son proporcionales, es decir, podemos utilizar como vector normal, el director de la recta.

$$\vec{n} = (1,1,2)$$

$$A(x - x_o) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$1(x-2) + 1(y-1) + 2(z-2) = 0 \rightarrow x + y + 2z - 7 = 0$$

JULIO 2015 B2.- Dada la recta $r: \begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ 2x + y + 4z = 1 \end{cases}$ y el plano

$$2x + (a+1)(y-3) + a(z-1) = 0$$

Determinar el valor de a para que el plano y la recta sean paralelos.

¿Pertenece el punto $P(1,0,-3)$ al plano obtenido en el apartado anterior?

Para que el plano y la recta sean paralelos, el vector director de la recta y el vector normal del plano tienen que formar un ángulo de 90 grados, es decir, que su multiplicación escalar de cero:

Para determinar el vector director del plano:

$$\overrightarrow{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5\vec{\imath} - 14\vec{\jmath} + 1\vec{k} \rightarrow (5,-14,1)$$

El vector normal del plano:

$$\vec{n} = (2, a+1, a)$$

Ahora hacemos la multiplicación escalar:

$$(5,-14,1) \cdot (2, a+1, a) = 0 \rightarrow 10 - 14a - 14 + a = 0$$

$$a = \frac{-4}{13}$$

Para saber si el punto pertenece al plano tenemos que sustituir el punto en la ecuación del plano:

Ecuación del plano→ $2x + \left(\frac{-4}{13} + 1\right)(y-3) - \frac{4}{13}(z-1) = 0$

El punto→ $P(1,0,-3)$

Comprobamos si el punto pertenece:

$$2(1) + \left(\frac{-4}{13} + 1\right)((0) - 3) - \frac{4}{13}((-3) - 1) = 0$$

Como podemos comprobar el punto no cumple la ecuación del plano, por tanto, el punto no pertenece al plano.

$$2 + \frac{27}{13} + \frac{16}{13} \neq 0$$

JUNIO 2016 A2.- Determinar el plano que pasa por el origen de coordenadas, es paralelo a la recta de ecuación

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$$

Y también es paralelo a la recta que pasa por los puntos $(0,1,1)\ y\ (1,1,0)$.

Cuando un plano es paralelo a dos rectas, para determinar el vector normal del plano, tenemos que hacer la multiplicación vectorial de los vectores directores de las rectas, es decir,

El vector de una de las rectas es: $(1,-1,1)$

Para hallar el vector de la recta que pasa por los puntos:

$$(1,1,0)-(0,1,1)=(1,0,-1)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-1\vec{k} \rightarrow (-1,-2,-1)$$

Con este vector y el origen de coordenadas tenemos que hallar la ecuación del plano:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$$-x-2y-z=0$$

JUNIO 2016 B2.- Dado el plano $x - 3y + 2z = 7$

Determina el punto simétrico del $(3, -8, 4)$ respecto a dicho plano.

Calcular la distancia entre los dos puntos simétricos.

PON EN PRACTICA LO QUE HAS APRENDIDO. RECUERDA QUE TIENES UN RESUMEN MUY TOP PARA REALIZAR ESTE TIPO DE EJERCICIOS.

SI TIENES DUDAS, ESCRIBEME Y TE LAS RESOLVERE 688-820-933

SOLUCIÓN:

$$\boldsymbol{M(1, -2, 0)}$$

$$\boldsymbol{DISTANCIA = 4\sqrt{14}}$$

JULIO 2016 A2.- Calcular la distancia del punto A de coordenadas $(4,4,3)$ al plano que pasa por los puntos de coordenadas $B(1,1,0), C(1,0,1)\ \ y\ \ D(0,1,1)$.

Lo primero que debemos de hacer, es crear el plano con los puntos B, C, D:

$$\overrightarrow{BC} = (0,-1,1)$$

$$\overrightarrow{BD} = (-1,0,1)$$

Estos dos vectores que hemos creado están contenidos en el plano, a nosotros nos interesa calcular el vector normal del plano que es perpendicular a estos dos vectores, por tanto, haremos la multiplicación vectorial para determinarlo:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1i - 1j - 1k \to (-1,-1,-1) \to (1,1,1)$$

Con este vector y uno de los tres puntos, creamos el plano:

$$A(x - x_o) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$1(x-1) + 1(y-1) + 1(z-0) = 0 \to x + y + z - 2 = 0$$

Ahora para calcular la distancia entre el plano que hemos creado y el punto A, haremos la siguiente formula:

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|4+4+3-2|}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

JULIO 2016 B2.- Sea r la recta que pasa por los puntos $P(1,2,3)\ y\ Q(-1,0,1)$

a) Determina la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por el punto $A(4,-2,-1)$

b) Determina la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por el punto $B(2,1,-3)$

c) Calcular la distancia que hay entre ambos planos.

PON EN PRACTICA LO QUE HAS APRENDIDO

SI TIENES DUDAS, ESCRIBEME Y TE LAS RESOLVERE 688-820-933

SOLUCIÓN:

a) $\mathbf{2x+2y+z+2=0}$

b) $\mathbf{2x+2y+z+4=0}$

c) $\boldsymbol{distancia\ entre\ planos} = \left|\frac{D-D\prime}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| = \frac{2}{3}$

JUNIO 2017 A2.- Dado el punto $M(1,-3,7)$, obtener su simétrico respecto a la recta que pasa por los puntos $A(1,-3,4)\ \ y\ \ B(0,-4,1)$.

Primero tenemos que crear la recta que pasa por los puntos A y B:

$$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,-3)$$

Con este vector y uno de los puntos, creamos la ecuación de la recta:

$$r: \begin{cases} x = -t \\ y = -4 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

Cuando ya tenemos la recta, tenemos que crear el plano que es perpendicular a la recta y que pasa por el punto M, recuerda que, si la recta y el plano son perpendiculares, podemos asumir lo siguiente:

$$\overrightarrow{d_r} = \vec{n} = (-1,-1,-3)$$

$$A(x - x_o) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$-1(x-1) - 1(y+3) - 3(z-7) = 0 \rightarrow -x - y - 3z + 19 = 0$$

Ahora debemos de calcular el punto de intersección de la recta con el plano, ya que dicho punto de intersección actuara como punto medio y de esta forma podremos calcular el punto simétrico de M:

$$Pi \rightarrow -(-t) - (-4-t) - 3(1-3t) + 19 = 0 \rightarrow t + 4 + t - 3 + 9t + 19 = 0 \rightarrow t = \frac{-20}{11}$$

Por tanto, el punto de intersección será:

$$Pi \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{-20}{11} \\ y = -4 - \frac{-20}{11} \\ z = 1 - 3\frac{-20}{11} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{20}{11} \\ y = \frac{-24}{11} \\ z = \frac{71}{11} \end{cases}$$

Sabiendo el punto de intersección, que además actúa como punto medio, podemos calcular B, ya que es el punto simétrico de A respecto del punto de intersección (punto medio).

$$PM = \frac{P + P'}{2} \rightarrow P' = 2PM - P \rightarrow P' = 2\left(\frac{20}{11}, \frac{-24}{11}, \frac{71}{11}\right) - (1,-3,7)) \rightarrow$$

$$P' = \left(\frac{29}{11}, \frac{-15}{11}, \frac{65}{11}\right)$$

JUNIO 2017 B2.- Calcula la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la recta

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3}$$

Y que pasa por el punto $A(14,3,3)$.

Lo primero que debemos hacer, es calcular el plano que es perpendicular a la recta del enunciado y que pase por el punto A, para esto, recuerda que, si plano y recta son perpendiculares, esto quiere decir que,

$$\overrightarrow{d_r} = \vec{n} = (2,-2,3)$$

$$A(x-x_o) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

$$2(x-14) - 2(y-3) + 3(z-3) = 0 \to 2x - 2y + 3z - 31 = 0$$

Cuando ya tenemos el plano, necesitamos calcular el punto de intersección de la recta con el plano, ya que, al calcular dicho punto de intersección, podremos crear la recta que es perpendicular a la recta r; con el punto A y el punto de intersección.

Necesitamos la recta r en su ecuación paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

$$Pi \to 2(2t) - 2(3-2t) + 3(1+3t) - 31 = 0 \to 4t - 6 + 4t + 3 + 9t - 31 = 0 \to t = 2$$

$$Pi \to \begin{cases} x = 2(2) \\ y = 3 - 2(2) \\ z = 1 + 3(2) \end{cases} \to \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = 7 \end{cases}$$

Con el punto de intersección y el punto A, creamos la recta:

$$\overrightarrow{APi} = (-10,-4,4)$$

$$s: \begin{cases} x = 14 - 10t \\ y = 3 - 4t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

JULIO 2017 A2.- Dada la recta que pasa por los puntos $A(0,2,3) y\ B(-1,1,1)$ encontrar un punto P de dicha recta tal que la distancia de P al punto M$(1,0,1)$sea la misma que la distancia de P al punto N$(0,4,2)$

Lo primero que vamos a realizar es el calculo de la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B:

$$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,-2)$$

Ahora, con este vector y el punto A o B, creamos la recta:

$$r: \begin{cases} x = -t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

La idea de este ejercicio es entender el siguiente concepto, cualquier punto de la recta r debe de cumplir la siguiente estructura→ $(x, y, z) = (-t, 2 - t, 3 - 2t)$

Con esta idea tan básica y sabiendo calcular la distancia entre dos puntos seremos capaces de resolver el ejercicio.

$$distancia\ PM \rightarrow \sqrt{(1+t)^2 + (t-2)^2 + (2t-2)^2}$$

$$distancia\ PM \rightarrow \sqrt{(t)^2 + (2+t)^2 + (2t-1)^2}$$

Ahora solamente tenemos que igualar el calculo de estas dos distancias:

$$\sqrt{(1+t)^2 + (t-2)^2 + (2t-2)^2} = \sqrt{(t)^2 + (2+t)^2 + (2t-1)^2}$$

$$(1+t)^2 + (t-2)^2 + (2t-2)^2 = (t)^2 + (2+t)^2 + (2t-1)^2$$

$$1 + 2t + t^2 + t^2 - 4t + 4 + 4t^2 - 8t + 4 = t^2 + 4 + 4t + t^2 + 4t^2 - 4t + 1$$

$$-10t + 9 = 5$$

$$t = \frac{2}{5}$$

Ahora con este parámetro calculado vamos a saber cual es el punto que esta a la misma distancia de M y de N:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \rightarrow t = \frac{2}{5} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = 2 - \frac{2}{5} \\ z = 3 - 2\frac{2}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = \frac{8}{5} \\ z = \frac{11}{5} \end{cases}$$

JUNIO 2018 A2.- Dados los puntos $A(3,3,3), B(2,3,4), C(0,0,4) y\ D(3,0,1)$

- ¿Están en el mismo plano? En caso afirmativo hallar la ecuación del plano. En caso negativo razonar la respuesta.

Calcular a para que el punto $P(a,a,8)$ este en la recta que pasa por los puntos A y C.

Para saber si 4 puntos están en el mismo plano tenemos varios procedimientos, en este caso lo haremos utilizando el procedimiento de los determinantes:

$$\overrightarrow{AB} = (-1,0,1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-3,-3,1)$$

$$\overrightarrow{AD} = (0,-3,-2)$$

Calculamos ahora el determinante de estos tres vectores:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -6+0+9-0-0-3=0$$

Como el determinante es cero, los cuatro puntos forman un plano.

Ahora tenemos que calcular la recta que pasa por los puntos A y C, para después determinar cuales tienes que ser los valores de a para que el punto P pertenezca a la recta.

$$\overrightarrow{AC} = (-3,-3,1)$$

$$r: \begin{cases} x = 3-3t \\ y = 3-3t \\ z = 3+t \end{cases}$$

Para que el punto P pertenezca a la recta debe cumplir la ecuación de dicha recta:

$$r: \begin{cases} x = 3-3t \\ y = 3-3t \\ z = 3+t \end{cases} \rightarrow (a,a,8) \rightarrow r: \begin{cases} a = 3-3t \\ a = 3-3t \\ 8 = 3+t \end{cases} \rightarrow de\ la\ ultima: t = 5$$

Por tanto $a = 3-3(5) \rightarrow a = -12$

JUNIO 2018 B2.- Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $P(2,-1,2) y\ a\ la\ recta$

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Como la recta esta contenida en el plano que queremos crear, su punto también este contenido en el plano y por tanto, con el punto de la recta y el punto P, podemos crear un vector:

$$P_r = (0,3,1)$$

$$P(2,-1,2)$$

$$\overrightarrow{PP_r} = (-2,4,-1)$$

Ahora con el vector de la recta, al estar contenida en el plano, también estará su vector contenido en el plano.

$$\overrightarrow{d_r} = (2,1,-1)$$

Ahora con los dos vectores que sabemos que están contenidos en el plano creamos el vector normal que será perpendicular a los dos vectores anteriores, para eso debemos hacer la multiplicación vectorial:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (3,4,10)$$

Finalmente, con este vector normal del plano y el punto P, creamos el plano:

$$A(x-x_o) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

$$3(x-2) + 4(y+1) + 10(z-2) = 0$$

$$3x + 4y + 10z - 22 = 0$$

JULIO 2018 A2.- Sea el plano de ecuación $x + y + z = 1$ sea la recta de ecuaciones paramétricas r: $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ y sea el punto $P(1,1,0)$

- Hallar la ecuación del plano perpendicular a r y que contenga a P.
- Hallar el punto simétrico de P respecto al plano.

En el primer apartado, si queremos el plano perpendicular a la recta, el vector normal del plano que vamos a crear es el mismo que el vector director de la recta:

$$\vec{n} = \overrightarrow{d_r} = (0,1,1)$$

Y con el punto P:

$$A(x - x_o) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$0(x - 1) + 1(y - 1) + 1(z - 0) = 0 \rightarrow y + z - 1 = 0$$

En el segundo apartado, para calcular el punto simétrico de P respecto al plano, lo primero que debemos hacer es calcular una recta perpendicular al plano y que pasa por dicho punto P:

Para eso debemos entender que, si recta y plano son perpendiculares, el vector director de la recta es el vector normal del plano:

$$\vec{n} = \overrightarrow{d_r} = (1,1,1)$$

Con el punto P creamos la recta:

$$s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

Ahora debemos de calcular el punto de intersección de la recta con el plano, ya que, gracias a ese punto seremos capaces de calcular el punto simétrico de P, puesto que, el punto intersección actúa como punto medio.

Entonces, metemos en la ecuación del plano, la ecuación de la recta:

$$Pi \rightarrow (1 + t) + (1 + t) + (t) = 1 \rightarrow 3t = -1 \rightarrow t = \frac{-1}{3}$$

Con este parámetro determinamos el punto de intersección:

$$Pi \rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{3} & x = \frac{2}{3} \\ y = 1 - \frac{1}{3} \rightarrow & y = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{3} & z = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

$$Pi = \frac{P+P'}{2} \to P' = 2Pi - P \to P' = 2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) - (1,1,0)) \to$$

$$P' = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

JUNIO 2019 A2.- Sean la recta

$$r: \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad y\ el\ plano\ x - y + Az = 0$$

- ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a r?
- Encontrar el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(0,0,0)$

Para que la recta y el plano sean paralelos, la multiplicación escalar de sus vectores tiene que ser cero. Lo primero que debemos hacer es calcular el vector director de la recta, ya que, tal y como esta representada la recta no lo sabemos:

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (5,8,1)$$

Este vector director de la recta y el vector normal del plano:

$$\vec{n} = (1, -1, A)$$

Su multiplicación escalar debe de ser cero: $(5,8,1) \cdot (1, -1, A) = 5 - 8 + A = 0 \to A = 3$

Un plano que sea perpendicular a la recta cumple que el vector normal de dicho plano y el vector director de la recta son el mismo, por tanto,

Con el vector $(5,8,1) y\ el\ punto\ (0,0,0)$ creamos el plano:

$$A(x - x_o) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$5x + 8y + z = 0$$

JUNIO 2019 B2.- Se consideran los tres puntos $A(0,0,1), B(1,1,1) y\, C(-1,-1,2)$. ¿Están alineados? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo calcular el plano que los contiene.

Para comprobar si tres puntos están o no alineados debemos de hacer el siguiente procedimiento:

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1,-1,1)$$

Para que los puntos estén alineados, los vectores que hemos calculado anteriormente deben de ser proporcionales, si no fuese el caso, no estarían alineados y podríamos crear el plano:

$$\frac{1}{-1} = \frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1} \rightarrow Los\ puntos\ forman\ un\ plano.$$

Para crear dicho plano, calculamos previamente el vector normal con los dos vectores que ya tenemos:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,0)$$

Con este vector normal y uno de los tres puntos podemos crear el plano, en esta ocasión utilizare el punto A:

$$A(x - x_o) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$1(x-1) - 1(y-1) = 0 \rightarrow x - y = 0$$

JUNIO 2020 A2.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-1,2,3) y\ es\ paralela\ a\ los\ vectores\ (-1,-2,-3) y\ (1,3,5)$

Hallar el valor de A para que le plano calculado en el apartado anterior y $Ax - y + 5z = 8$ sean perpendiculares.

Recuerda que, si un plano es paralelo a dos vectores, podemos calcular su vector normal haciendo la multiplicación vectorial, ya que, esta operación nos da un vector perpendicular a los dos vectores que usamos en la operación.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1,2,-1)$$

Con este vector y el punto $(-1,2,3)$ creamos el plano:

$$A(x - x_o) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$-1(x+1) + 2(y-2) - 1(z-3) = 0 \rightarrow -x + 2y - z - 2 = 0$$

Si dos planos son perpendiculares, eso quiere decir que, la multiplicación escalar de sus vectores normales es cero, por tanto,

$$(-1,2,-1)\cdot(A,-1,5)=0\rightarrow -A-2-5=0\rightarrow A=-7$$

JULIO 2020 A2.- Dada la recta

$$r=\begin{cases}3x+y-z=2\\2x+y+4z=1\end{cases}\; y\ el\ plano\ 3x+(a+1)(y+1)+az=1$$

- Hallar a para que la recta y el plano sean paralelos.
- Determinar si el punto $P(1,1,2)$ pertenece al plano hallado en el apartado anterior.

Para que la recta y el plano sean paralelos se tiene que cumplir que la multiplicación escalar de ambos vectores, tanto vector normal como vector director, sea cero.

$$\overrightarrow{d_r}=\begin{vmatrix}i & j & k\\3 & 1 & -1\\2 & 1 & 4\end{vmatrix}=(5,-14,1)$$

$$\vec{n}=(3,a+1,a)$$

$$(5,-14,1)\cdot(3,a+1,a)=0\rightarrow 15-14a-14+a=0\rightarrow a=\frac{1}{13}$$

El plano por tanto será: $3x+(a+1)(y+1)+az=1\rightarrow a=\frac{1}{13}\rightarrow 3x+\frac{14}{13}y+\frac{1}{13}z+\frac{1}{13}=0$

Para que el punto P pertenezca al plano, debe cumplir su ecuación:

$$3x+\frac{14}{13}y+\frac{1}{13}z+\frac{1}{13}=0\rightarrow 3(1)+\frac{14}{13}(1)+\frac{1}{13}(2)+\frac{1}{13}\neq 0\rightarrow El\ punto\ no\ pertenece.$$

JUNIO 2020 B2.- Sea el plano $2x-y+Az=0$. Sea r la recta dada por $\begin{cases}4x-3y+4z=-1\\3x-2y+z=-3\end{cases}$
Hallar A para que r y el plano sean paralelos. Además, obtener el plano perpendicular a r y que pase por el origen.

Para que la recta y el plano sean paralelos sus vectores, tanto normal como el director, tienen que ser perpendiculares, es decir, la multiplicación escalar entre ambos tiene que ser cero:

$$\overrightarrow{d_r}\cdot\vec{n}=0$$

Para poder calcular el vector director de la recta, que nos la dan en forma implícita, tenemos que hacer la multiplicación vectorial;

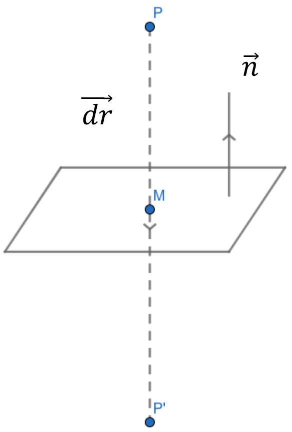
$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\4 & -3 & 4\\3 & -2 & 1\end{vmatrix}=(5,8,1)$$

Ahora ya podemos hacer el calculo para determinar el valor de A y que la recta y el plano sean paralelas.

$$\overrightarrow{d_r} \cdot \vec{n} = 0 \to (5,8,1) \cdot (2,-1,A) = 0 \to 10 - 8 + A = 0 \to A = -2$$

JULIO 2020 B2.- Hallar el punto Q, simétrico de

$P = (1,2,3)$ $respecto\ al\ plano\ de\ ecuacion\ x + y + z = 0$, explicando los pasos seguidos para su calculo.



Creamos la representación de la derecha, teniendo en cuenta lo siguiente:

$$\vec{n} = \overrightarrow{d_r} \to el\ vector\ normal\ del\ plano\ y\ vector\ director\ de\ la\ recta\ son\ paralelos$$

Observa que la recta (en discontinua) la vas a crear utilizando el vector normal del plano y el punto P

Cuando creas la recta con $P\ y\ \overrightarrow{d_r} = \vec{n}$, tienes que calcular el punto medio M. Para eso tienes que introducir en el plano las ecuaciones de la recta:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \qquad r: \begin{cases} x = \cdots \\ y = \cdots \\ z = \cdots \end{cases}$$

$$A(\ldots) + B(\ldots) + C(\ldots) + D = 0$$

$$de\ esta\ forma\ calculas\ el\ valor\ de\ un\ parametro\ que\ sustituiremos\ en\ la\ ecuación\ de\ la\ recta.$$

$$y\ obtener\ las\ coordenas\ (x, y, z)\ del\ punto\ M$$

Para finalmente halla punto simétrico: $P' = 2M - P$

HAZ LOS CALCULOS CON LOS PASOS QUE TE DOY