A1 Y B1 SISTEMAS Y MATRICES

JUNIO 2020 A1.- Discutir el sistema en función de a, siendo:

$$\begin{cases} ax - y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \\ x + 2y + az = 3 \end{cases}$$

Resolver en función de a, mediante el método de CRAMER, en los casos en que sea posible.

JUNIO 2020 B1.- Sea la matriz dada por $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$

- Determinar para que valores de a la matriz no tiene inversa.
- Calcular, si es posible, la matriz inversa para $a = 0$, y en caso de que no sea posible razonar por que no es posible.

JULIO 2020 A1.- Discutir, en función de A, el sistema que sigue y resolver cuando sea posible:

$$\begin{cases} x + y + z = 2A \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ 4x + 4y + Az = 4A \end{cases}$$

JULIO 2020 B1.- Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, calcular\ razonadamente\ M^{2020}$

JULIO 2019 A1.- Discutir, en función de los valores de A, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x + y - z = 1 \\ 2x - 2y + Az = A \end{cases}$$

JULIO 2019 B1.- Dada una matriz de tamaño 3x3 cuyo determinante es igual a 5, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones:

- Se cambian entre si la primera y segunda fila.
- Se multiplica a la tercera columna por -2
- Se multiplica a toda la matriz por 2
- Se transpone la matriz.

JUNIO 2019 A1.- Discutir, en función de m, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m+3)x + my + mz = m - 1 \\ 3x + mz = m - 2 \\ -y + z = m - 3 \end{cases}$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

JUNIO 2019 B1.-Dada la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular, razonadamente, el valor de a para que el determinante de A^2 $valga$ 4.

JUNIO 2018 B1.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones $S(a)$

$$S(a) = \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (a+1)y - az = 2a \\ x + ay + (a+1)z = 1 \end{cases}$$

Discutirlo según los distintos valores de a.

¿Hay solución para $a = 2$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

JUNIO 2018 A1.- Calcula el rango de la siguiente matriz según los valores de a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ -1 & 3 & a & -2 \end{pmatrix}$$

JULIO 2018 A1.- Determina el rango de la matriz A según los valores de a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

JULIO 2018 B1.- Discutir el siguiente sistema en función del parámetro a:

$$S(a) = \begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a+1)y - z = a - 1 \end{cases}$$

JUNIO 2017 A1.- Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m. No tienes que resolverlo.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ 3x + y - mz = 3 \end{cases}$$

JUNIO 2017 B1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$

¿Para que valores de m la matriz A posee inversa? Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro m.

Hallar el valor de m para que se cumpla la igualdad $A^2 = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

JULIO 2017 A1.- Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a:

$$\begin{cases} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{cases}$$

En caso de existir, encontrar la solución para el caso de $a = 0$.

JULIO 2017 B1.- Calcula para que valor, o valores, de x admite inversa la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En caso de existir, calcula la inversa de A para $x = -3$

JUNIO 2016 A1.- Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro b. No es necesario resolverlo en ningún caso:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (1+b)y - bz = 2b \\ x + by + (1+b)z = 1 \end{cases}$$

JUNIO 2016 B1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Encontrar los valores del parámetro a para que la matriz NO sea invertible.

En caso de existir, calcula la inversa de A para $a = 2$

JULIO 2016 A1.- Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro b

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+2y+bz=-3 \\ x-2y-z=b \end{cases}$$

Encontrar la solución, si existe, para el caso $b=2$.

JULIO 2016 B1.-Determina el rango de la matriz A según los valores del parámetro a:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ a & a-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

En caso de existir, calcula la inversa de A para $a=1$. Si no existe tal inversa explica porqué.

JUNIO 2015 A1.- Se sabe que $\begin{vmatrix} A & B & C \\ P & Q & R \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=10$. Calcula de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor de los siguientes determinantes:

$$A=\begin{vmatrix} 2A & 2B & 2C \\ A+P & B+Q & C+R \\ -X+A & -Y+B & -Z+C \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} 3P & 3Q & 3R \\ 2A & 2B & 2C \\ -X & -Y & -Z \end{vmatrix}$$

JUNIO 2015 B1.- Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y-z=-4 \\ 3x+ay+z=a-1 \\ 2x+ay=-2 \end{cases}$$

Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

Resolver el sistema en el caso o casos de indeterminación.

¿Existe algún valor de a tal que el sistema no tenga solución? Razona la respuesta.

JULIO 2015 A1.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ calcular que valor debe tener x para que la matriz inversa de A coincida con la opuesta de A (esto es $A^{-1}=-A$)

JULIO 2015 B1.- discute en función del parámetro m el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + my = 1 \\ 3x + mz = m - 2 \\ -y + z = m - 3 \end{cases}$$

¿Existe casos de indeterminación? Si la respuesta es afirmativa resolver el sistema en esos casos. Si es negativa explicar porqué.

JUNIO 2014 A1.- Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - 2y - z = -1 \\ ax - y + 2z = 2 \\ x + 2y + az = 3 \end{cases}$$

Discutir el sistema según los valores del parámetro a

Resolver el sistema cuando tenga mas de una solución

JUNIO 2014 B1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$

Determinar para que valores del parámetro a la matriz A no tiene inversa.

Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $a = -2$, y en caso de que no sea posible razonar porqué.

JULIO 2014 A1.- Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -x + my + 2z = m \\ 2x + my - z = 2 \\ mx - y + 2z = m \end{cases}$$

Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

Para $m = -1$ resolver en caso de que sea posible. Si es imposible explicar por qué.

JULIO 2014 B1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} c + d & d \\ 2c & c + d \end{pmatrix}$

Determinar para que valores de c y d la matriz A tiene inversa.

Determinar la inversa de la matriz A^2 en el caso $c = 1\,; d = -2$.

JUNIO 2013 A1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$ donde a es un parámetro real.

Calcular razonadamente el rango de la matriz A en función del parámetro a.

Explicar razonadamente el rango de la matriz para el caso $a = 1$ y en caso de que exista la inversa calcularla.

JUNIO 2013 B1.- Dado el sistema

$$\begin{cases} mx + my + 2z = m \\ x + (m-2)y = -1 \\ 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

Discutirlo según los valores del parámetro m

Resolverlo, si es posible, para $m = 5$.

JULIO 2013 A1.- dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ ay - z = -1 \\ x + 2ay = 0 \end{cases}$$

Discutirlo según los distintos valores de a

Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

JULIO 2013 B1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & m \\ m & 1 & 3 \\ 1 & 7 & m \end{pmatrix}$

Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro m.

Para $m = 0$ halla la matriz inversa de A.

JUNIO 2012 A1.- Dado el sistema

$$\begin{cases} x + (A+1)y + Az = A + 1 \\ Ay + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Discutirlo según los valores del parámetro A

Resolverlo, si es posible, para el caso $A = 4$.

JUNIO 2012 B1.- Para cada par de números reales (a, b), se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \ y \ B = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calcular los determinantes de las matrices A y B.
- Para $a = b = 1$, calcular el determinante de la matriz producto $A \cdot B$
- Obtener, razonadamente, para que valores de a y b ninguna de las dos matrices tiene matriz inversa

JULIO 2012 A1.- Dado el sistema

$$\begin{cases} (m-1) + y + z = m \\ x + (m-1)y + z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

- Discutirlo según los valores del parámetro m
- Resolverlo, si es posible, para los casos $m = 0 \ y \ m = 3$

JULIO 2012 B1.- Sea B la matriz $B = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \ e \ I \ la \ matriz \ identidad.$

- Hallar para que valores de m se verifica que $B^2 = 2B + I$
- Calcular la inversa de B para los valores de m del apartado anterior.

JUNIO 2011 A1.- Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + 4z = -2 \\ x + 3y + m^2 z = m \end{cases}$$

- Discutir su compatible en función del parámetro m.
- Resolver el sistema para $m = 0$.

JUNIO 2011 B1.-Dada la matriz A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Contestar razonadamente a la siguiente pregunta ¿Existe algún valor de a tal que A no tenga inversa para ese valor?
- Calcular, en caso de que sea posible, la matriz inversa de $A^2 \ para \ a = 0$.

JULIO 2011 A1.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S = \begin{cases} mx + 2y = 3 \\ -x + 2mz = -1 \\ 3x - y - 7z = m + 1 \end{cases}$$

Discutir el sistema para los distintos valores de m. Si existen casos de indeterminación resolver en dichos casos. Si no existen explicar porqué.

JULIO 2011 B1.- A es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica la igualdad matricial

$$A\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular de forma razonada la matriz A.

JULIO 2010 A1.- Discutir el siguiente sistema en función del parámetro a:

$$S = \begin{cases} ax - y + 2z = 1 \\ x - 2y = 0 \\ ax + y - z = 1 \end{cases}$$

Resolverlo para $a = 1$

JULIO 2010 B1.-Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones

$$S = \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

En función del parámetro a.

Resolverlo en los casos de indeterminación.

JUNIO 2010 A1.- Se considera el sistema de ecuaciones lineales que sigue:

$$S = \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ ax + y + 2z = a + 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Discutir su compatibilidad en función del parámetro a

Resolver el sistema para $a = 0$.

JUNIO 2010 B1.-Discutir la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro a:

$$S = \begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 3x - 2y - z = 3 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}$$

Resolver el sistema en el caso de indeterminación.

SOLUCIONES

JUNIO 2020 A1.- Discutir el sistema en función de a, siendo:

$$\begin{cases} ax - y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \\ x + 2y + az = 3 \end{cases}$$

Resolver en función de a, mediante el método de CRAMER, en los casos en que sea posible,

Lo primero, transformamos el sistema en matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 3 \end{array}\right) \rightarrow$$

Ahora lo que haremos será calcular el determinante de A para que ver los valores de a sobre los que haremos el estudio de las soluciones:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + 1 + 4 + 4 + a + 2a \rightarrow$$

$$-2a^2 + 3a + 9 = 0 \rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-2)(9)}}{-4} = \begin{cases} a = -\dfrac{3}{2} \\ a = 3 \end{cases}$$

Ahora tenemos que hacer la discusión del sistema en función de estos valores:

$\Rightarrow\ Si\ a \neq \frac{-3}{2}\ y\ a \neq 3$

El determinante de A seria distinto de cero, por tanto, si el determinante de una matriz 3x3 es distinto de cero, su rango es máximo, en este caso 3.

Como A esta dentro de la matriz ampliada, podemos deducir que, el rango de la matriz ampliada también será 3.

Es decir, $Rango\ (A) = rango(A') = numero\ incognitas \rightarrow Sistemas\ Compatible\ Determinado$

$\Rightarrow\ Si\ a = 3$

$$|A| = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Cogemos un determinante 2x2 dentro de la matriz A para demostrar que el rango de A es dos.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 2$$

Ahora, utilizando las dos columnas que hemos utilizado para demostrar que el rango de A es dos, las cogemos con la columna de la matriz ampliada para comprobar el rango de A'

$$|A'| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -18 - 1 + 4 + 4 + 3 - 6 \neq 0 \rightarrow Rango\ (A') = 3$$

$$Como\ Rango\ (A) \neq Rango\ (A') \rightarrow Sistema\ incompatible.$$

$\Rightarrow\ Si\ a = -\frac{3}{2}$

$$|A| = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Cogemos un determinante 2x2 dentro de la matriz A para demostrar que el rango de A es dos.

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 2$$

Ahora, utilizando las dos columnas que hemos utilizado para demostrar que el rango de A es dos, las cogemos con la columna de la matriz ampliada para comprobar el rango de A'

$$|A'| = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = +9 - 1 + 4 + 4 + 3 - 6 \neq 0 \rightarrow Rango\ (A') = 3$$

$$Como\ Rango\ (A) \neq Rango\ (A') \rightarrow Sistema\ incompatible.$$

Ahora tenemos que resolver el sistema en función de a mediante CRAMER:

$$AX + BY + CZ = U \quad donde\ A = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\ ;\ C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}\ y\ U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para dar las soluciones del sistema vamos a utilizar la regla de Cramer:

$$x = \frac{|UBC|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}} = \frac{-3a + 23}{-2a^2 + 3a + 9}$$

$$y = \frac{|AUC|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}} = \frac{a^2 + a + 2}{-2a^2 + 3a + 9}$$

$$z = \frac{|ABU|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}} = \frac{-8a + 10}{-2a^2 + 3a + 9}$$

JUNIO 2020 B1.- Sea la matriz dada por $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$

- Determinar para que valores de a la matriz no tiene inversa.
- Calcular, si es posible, la matriz inversa para $a = 0$, y en caso de que no sea posible razonar por que no es posible.

Una matriz no tiene inversa cuando su determinante es igual a cero, por tanto, vamos a calcular el determinante de la matriz y lo igualamos a cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 - a^2 - a^2 \to 1 - a^2 = 0 \to a = \pm 1$$

Cuando $a = \pm 1 \to La\ matriz\ no\ tiene\ inversa, para\ el\ resto\ de\ valores, si\ tiene.$

Ahora debemos de calcular la inversa de M cuando $a = 0$

$$|M| = 1$$

Ahora vamos a calcular la matriz de adjunto:

$$M_{adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & a \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \to a = 0 \to M_{adj} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que hacer la traspuesta de la matriz de adjuntos:

$$\left(M_{adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\left(M_{adj}\right)^t \to M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

JULIO 2020 A1.- Discutir, en función de A, el sistema que sigue y resolver cuando sea posible:

$$\begin{cases} x+y+z=2A \\ 2x+3y+4z=2 \\ 4x+4y+Az=4A \end{cases}$$

Lo primero, transformamos el sistema en matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2A \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & A & 4A \end{array}\right) \rightarrow$$

Ahora lo que haremos será calcular el determinante de A para que ver los valores de a sobre los que haremos el estudio de las soluciones:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & A \end{vmatrix} = 3A+8+16-12-2A-16 \rightarrow$$

$$A-4=0 \rightarrow A=4$$

$\Rightarrow \ Si\ A \neq 4$

El determinante de A seria distinto de cero, por tanto, si el determinante de una matriz 3x3 es distinto de cero, su rango es máximo, en este caso 3.

Como A esta dentro de la matriz ampliada, podemos deducir que, el rango de la matriz ampliada también será 3.

Es decir, $Rango\ (A) = rango(A') = numero\ incognitas \rightarrow Sistemas\ Compatible\ Determinado$

$\Rightarrow \ Si\ A = 4$

$$|A| = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Cogemos un determinante 2x2 dentro de la matriz A para demostrar que el rango de A es dos.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 2$$

Ahora, utilizando las dos columnas que hemos utilizado para demostrar que el rango de A es dos, las cogemos con la columna de la matriz ampliada para comprobar el rango de A'

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 16 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow Rango\ (A') = 3$$

$Como\ Rango\ (A) \neq Rango\ (A') \rightarrow Sistema\ incompatible.$

$$AX + BY + CZ = U \quad donde\ A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \ ;\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ A \end{pmatrix} \ y\ U = \begin{pmatrix} 2A \\ 2 \\ 4A \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{|UBC|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} 2A & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4A & 4 & A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & A \end{vmatrix}} = \frac{6A^2 + 16A + 8 - 12A - 2A - 32A}{A - 4} \rightarrow \frac{6A^2 - 30A + 8}{A - 4}$$

$$y = \frac{|AUC|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2A & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4A & A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & A \end{vmatrix}} = \frac{26A - 8 - 4A^2}{A - 4}$$

$$z = \frac{|ABU|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2A \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & A \end{vmatrix}} = \frac{-4A}{A - 4}$$

JULIO 2020 B1.- Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, calcular\ razonadamente\ M^{2020}$

Para llegar a calcular la matriz M^{2020} primero tenemos que calcular M^2; M^3; M^4 y así sucesivamente hasta encontrar un patrón y poder después determinar cual será la matriz que nos pregunta el enunciado:

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, y viendo el patrón que se esta dando, podemos afirmar que la matriz n-esima de M será:

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $M^{2020} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2020 & 1 \end{pmatrix}$

JULIO 2019 A1.- Discutir, en función de los valores de A, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x+y-z=1 \\ 2x-2y+Az=A \end{cases}$$

Convertimos el sistema en matriz:

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x+y-z=1 \\ 2x-2y+Az=A \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & A & A \end{array}\right)$$

Lo primero calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & A \end{vmatrix} = A-4-6-6-2-2A \rightarrow -A-18=0 \rightarrow A=-18$$

Sabiendo el valor de A que hace cero el determinante de la matriz de coeficientes, ahora tenemos que discutir el sistema en función de ese valor:

- $A \neq -18$

Podemos asumir que si $A \neq -18 \rightarrow \det(A) \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 3(máximo)$

Como A esta dentro de la matriz ampliada, podemos deducir que, el rango de la matriz ampliada también será 3.

Es decir, $Rango\ (A) = rango(A') = numero\ incognitas \rightarrow Sistemas\ Compatible\ Determinado$

- $A = -18$

$$|A| = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Cogemos un determinante 2x2 dentro de la matriz A para demostrar que el rango de A es dos.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 2$$

Ahora, utilizando las dos columnas que hemos utilizado para demostrar que el rango de A es dos, las cogemos con la columna de la matriz ampliada para comprobar el rango de A'

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -18 \end{vmatrix} = -18+4-12-12+36+2 = 0 \rightarrow Rango\ (A') = 2$$

$$Como\ Rango\ (A) \neq Rango\ (A') \rightarrow Sistema\ incompatible.$$

JULIO 2019 B1.- Dada una matriz de tamaño 3x3 cuyo determinante es igual a 5, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones:

- Se cambian entre si la primera y segunda fila.
- Se multiplica a la tercera columna por -2
- Se multiplica a toda la matriz por 2
- Se transpone la matriz.

El determinante de la matriz inicial es 5:

- Se cambian entre si la primera y segunda fila $\rightarrow\ -5$
- Se multiplica a la tercera columna por -2 $\rightarrow 10$
- Se multiplica a toda la matriz por 2 $\rightarrow 80$
- Se transpone la matriz $\rightarrow 80$

JUNIO 2019 A1.- Discutir, en función de m, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m+3)x + my + mz = m-1 \\ 3x + mz = m-2 \\ -y + z = m-3 \end{cases}$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

Lo primero creamos la matriz asociada a este sistema, es decir, matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m+3 & m & m & m-1 \\ 3 & 0 & m & m-2 \\ 0 & -1 & 1 & m-3 \end{array}\right)$$

Ahora lo que tienes que hacer es calcular el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} m+3 & m & m \\ 3 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3m - 3m + m(m+3) \to m^2 - 3m \to igualamos\ a\ cero\ el\ det$$

$$m^2 - 3m = 0 \to m(m-3) = 0 \to \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$$

Ahora tenemos que hacer la discusión del sistema en función de estos valores:

$\Rightarrow\ Si\ m \neq 0\ y\ m \neq 3$

El determinante de A seria distinto de cero, por tanto, si el determinante de una matriz 3x3 es distinto de cero, su rango es máximo, en este caso 3.

Como A esta dentro de la matriz ampliada, podemos deducir que, el rango de la matriz ampliada también será 3.

Es decir, $Rango\ (A) = rango(A') = numero\ incognitas \to Sistemas\ Compatible\ Determinado$

$\Rightarrow\ Si\ m = 3$

$$|A| = 0 \to Rango\ (A) < 3$$

Cogemos un determinante 2x2 dentro de la matriz A para demostrar que el rango de A es dos.

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \to Rango\ (A) = 2$$

Ahora, utilizando las dos columnas que hemos utilizado para demostrar que el rango de A es dos, las cogemos con la columna de la matriz ampliada para comprobar el rango de A'

$$|A'| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0 \to Rango\ (A') < 3$$

$Como\ Rango\ (A) = Rango\ (A') = 2 \neq n\ incognitass \to Sistema\ compatible\ indeterminado.$

$\Rightarrow\ Si\ m = 0$

$$|A| = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Cogemos un determinante 2x2 dentro de la matriz A para demostrar que el rango de A es dos.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Rango\ (A) = 2$$

Tenemos que buscar otro determinante 2x2 que de distinto de cero para poder demostrar que el rango de la matriz A es dos.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 2$$

Ahora, utilizando las dos columnas que hemos utilizado para demostrar que el rango de A es dos, las cogemos con la columna de la matriz ampliada para comprobar el rango de A'

$$|A'| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 6 \neq 0 \rightarrow Rango\ (A') = 3$$

$$Como\ Rango\ (A) \neq Rango\ (A') \rightarrow Sistema\ incompatible.$$

Ahora cuando $m = 3$ tenemos que resolver el sistema, debemos tener en cuenta que se trata de un sistema con infinitas soluciones, es decir, sistema compatible indeterminado:

$$\begin{cases} (m+3)x + my + mz = m - 1 \\ 3x + mz = m - 2 \\ -y + z = m - 3 \end{cases} \rightarrow m = 3 \rightarrow \begin{cases} 6x + 3y + 3z = 2 \\ 3x + 3z = 1 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

Lo mas importante en este apartado es recordar que dos ecuaciones habíamos elegido para demostrar que el rango de la matriz de coeficientes es 2 ya que será las dos ecuaciones que utilizaremos, en este caso han sido las dos primeras, por tanto, eliminamos la última ecuación y decimos que $z = t$

$$\begin{cases} 6x + 3y + 3z = 2 \\ 3x + 3z = 1 \\ z = t \end{cases} \rightarrow Ahora\ cambiamos\ en\ la\ primera\ y\ segunda\ z = t$$

$$\begin{cases} 6x + 3y + 3t = 2 \\ 3x + 3t = 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$\rightarrow en\ este\ caso\ con\ la\ segunda\ ecuación\ determinamos\ el\ valor\ de\ x\ en\ funcion\ de\ t.$$

$$x = \frac{1 - 3t}{3}$$

Sabiendo el valor de $z = t\ , y\ el\ valor\ de\ x = \frac{1-3t}{3}$ lo sustituimos en la primera ecuación y calculamos el valor de y en función de t.

$$6x + 3y + 3t = 2 \rightarrow 6\left(\frac{1 - 3t}{3}\right) + 3y + 3t = 2 \rightarrow 2 - 6t + 3y + 3t = 2 \rightarrow y = t$$

JUNIO 2019 B1.-Dada la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular, razonadamente, el valor de a para que el determinante de A^2 $valga$ 4.

Primero tenemos que calcular la matriz A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+a & a^2 & 0 \\ 3 & a+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+a & a^2 & 0 \\ 3 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \sqrt{4} \rightarrow a = \pm 2$$

JUNIO 2018 B1.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones $S(a)$

$$S(a) = \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (a+1)y - az = 2a \\ x + ay + (a+1)z = 1 \end{cases}$$

Discutirlo según los distintos valores de a.

¿Hay solución para $a = 2$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

Lo primero que tenemos que hacer es transformar el sistema en una matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & a+1 & -a & 2a \\ 1 & a & a+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a calcular primero el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -a \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2 - 2a - a + a + 1 - 2(a+1) + a^2$$

$$a^2 + 2a + 1 - 2a - a + a + 1 - 2a - 2 + a^2$$

$$2a^2 - 2a = 0 \rightarrow a(2a-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Una vez hemos obtenido los valores de a que hacen cero el determinante, tenemos que hacer la discusión del sistema:

- $a \neq 0\,; a \neq 1$

Siempre que estudiemos este caso, $\det(A_{3x3}) \neq 0 \rightarrow rang(A) = 3 = rang\ (A') = nº\ incognitas$

Estamos siempre ante un caso de un Sistema Compatible Determinado (una solución)

- $a = 1$

En este caso $\det(A) = 0 \rightarrow Rang\ (A) < 3$

Ahora tenemos que buscar un determinante de 2x2 que sea distinto de cero para poder afirmar que el rango de A es dos.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & a+1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ -a \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & a \end{matrix} & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, tenemos\ que\ buscar\ otro\ ya\ que\ este\ nos\ ha\ dado\ cero.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \rightarrow Rang\ (A_{2x2}) = 2$$

Ahora vamos a ver el rango de la ampliada, para ello vamos a utilizar las dos columnas que hemos empleado para el calculo del rango de A y le añadimos la columna de soluciones:

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow como\ el\ determinante\ es\ cero\ podemos\ afirmar\ que\ el$$

$rango\ (A') < 3 \rightarrow Rang\ (A') = 2.$

Podemos concluir $Rang\ (A) = Rang(A') = 2 < 3 = nº\ incognitas \rightarrow S.C.I\ (infinitas\ soluciones)$

- $a = 0$

En este caso $\det(A) = 0 \rightarrow Rang\ (A) < 3$

Ahora tenemos que buscar un determinante de 2x2 que sea distinto de cero para poder afirmar que el rango de A es dos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -a \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow Rang\ (A_{2x2}) = 2$$

Ahora vamos a ver el rango de la ampliada, para ello vamos a utilizar las dos columnas que hemos empleado para el calculo del rango de A y le añadimos la columna de soluciones:

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 = -3 \neq 0 \rightarrow Rang\ (A') = 3$$

Por lo tanto, $Rang(A) \neq Rang(A') \rightarrow Sistema\ Incompatible\ (no\ tiene\ solución).$

Ahora vamos a resolver cuando $a = 2$. Escribimos nuevamente el sistema:

$$S(2) = \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + 3y - 2z = 4 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$AX + BY + CZ = U \quad donde\ A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \ ; \ C = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \ y\ U = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para dar las soluciones del sistema vamos a utilizar la regla de Cramer:

$$x = \frac{|UBC|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{18 - 4 - 8 + 3 - 24 + 8}{9 - 4 - 2 + 3 - 6 + 4} = \frac{-7}{4}$$

$$x = \frac{|AUC|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{12 - 4 - 1 + 4 - 6 + 2}{9 - 4 - 2 + 3 - 6 + 4} = \frac{7}{4}$$

$$x = \frac{|ABU|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3 + 8 + 4 - 6 - 2 - 8}{9 - 4 - 2 + 3 - 6 + 4} = \frac{-1}{4}$$

JUNIO 2018 A1.- Calcula el rango de la siguiente matriz según los valores de a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ -1 & 3 & a & -2 \end{pmatrix}$$

Empezamos con el determinante de A con las tres primeras columnas, donde tenemos todos los parámetros:

- $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & a & 4 \\ -1 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2 + 0 + 0 + 4a - 0 - 12 = a^2 + 4a - 12$

$$a^2 + 4a - 12 = 0 \to a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-12)}}{2} = \begin{cases} a = \dfrac{-4-8}{2} = -6 \\ a = \dfrac{-4+8}{2} = 2 \end{cases}$$

- $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2a + 2a = 0$
- $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & a \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0$
- $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & a & 4 \\ -2 & 3 & a \end{vmatrix} = 2a^2 + 8a - 24$

$$2a^2 + 8a - 24 = 0 \to \begin{cases} a = -6 \\ a = 2 \end{cases}$$

Entonces ahora si analizas la situación, te darás cuenta de que, tienes que diferenciar dos casos:

$$Caso\ 1:\ \ a = -6\ \ o\ a = 2 \to \det(A) = 0 \to Rango\ (A) = 2$$

$$Caso\ 2:\ a \neq -6\ \ o\ a \neq 2 \to \det(A) = 0 \to Rango\ (A) = 3$$

JULIO 2018 A1.- Determina el rango de la matriz A según los valores de a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + a^2(a+1) - 2a = a^3 + a^2 - 2a \rightarrow$$

$$a^3 + a^2 - 2a = 0 \rightarrow a(a^2 + a - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 + a - 2 = 0 \rightarrow a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-2)}}{2} = \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 - 2a \rightarrow a^2 - 2a = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2a \rightarrow 4 - 2a = 0 \rightarrow a = 2$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ a & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2a(a+1) - 4 \rightarrow 2a^2 + 2a - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Y ahora, cuando ya tienes todos los determinantes hechos, analizas la situación:

En conclusión, como no puedes encontrar un valor de a, común en todos los cálculos, de forma que haga cero el valor del determinante el rango de la matriz siempre será tres, independientemente del valor que tenga el parámetro a.

JULIO 2018 B1.- Discutir el siguiente sistema en función del parámetro a:

$$S(a)=\begin{cases} x+ay-z=2 \\ 2x+y+az=0 \\ 3x+(a+1)y-z=a-1 \end{cases}$$

¿Hay solución para $a=1$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

$$S(a)=\begin{cases} x+ay-z=2 \\ 2x+y+az=0 \\ 3x+(a+1)y-z=a-1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 3 & a+1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

Calcula el determinante de la matriz de coeficientes, a lo que llamas A.

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & a+1 & -1 \end{vmatrix} = -1+3a^2-2a-2+3+2a-a^2-a$$

$$2a^2-a=0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- $a \neq 0 \;\; y \;\; a \neq \frac{1}{2}$

$$\det(A) \neq 0 \rightarrow Como\ A\ es\ una\ matriz\ 3x3 \rightarrow Rango\ (A)=3$$

El rango de la matriz ampliada A^*, al estar la matriz A dentro de ella, también será 3.

$$rango(A)=Rango\ (A^*)=3=nº\ incognitas \rightarrow SCD$$

- $a=0$

$$\det(A)=0 \rightarrow Como\ A\ es\ una\ matriz\ 3x3 \rightarrow Rango\ (A)<3$$

Ahora tienes que coger una matriz 2x2 que este dentro de A para comprobar si su determinante es distinto de cero y afirmar que el rango es dos.

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow Como\ A\ es\ 2x2 \rightarrow Rango(A) = 2$$

Ahora para comprobar el rango de la matriz ampliada, debes de coger, las dos columnas que has utilizado para afirmar que el rango de A es dos, y la ultima columna.

$$\det(A^*) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 6 = -3 \neq 0 \rightarrow Como\ la\ matriz\ con\ la\ que\ trabajamos\ es\ 3x3$$
$$\rightarrow Rango\ de\ (A^*) = 3$$

$$Rango\ (A) \neq Rango(A^*) \rightarrow Sistema\ Incompatible.$$

- $a = \frac{1}{2}$

$$\det(A) = 0 \rightarrow Como\ A\ es\ una\ matriz\ 3x3 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Ahora tienes que coger una matriz 2x2 que este dentro de A para comprobar si su determinante es distinto de cero y afirmar que el rango es dos.

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \rightarrow Tienes\ que\ buscar\ otro\ determinante\ 2x2\ dentro\ de\ A.$$

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + 1 \neq 0 \rightarrow Como\ A\ es\ 2x2 \rightarrow Rango(A) = 2$$

Ahora para comprobar el rango de la matriz ampliada, debes de coger, las dos columnas que has utilizado para afirmar que el rango de A es dos, y la ultima columna.

$$\det(A^*) = \begin{vmatrix} {}^1/_2 & -1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ {}^3/_2 & -1 & -{}^1/_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8} - 2 - \frac{6}{4} - \frac{1}{2} \neq 0 \rightarrow Como\ la\ matriz\ con\ la\ que\ trabajamos\ es\ 3x3 \rightarrow Rango\ de\ (A^*) = 3$$

$$Rango\ (A) \neq Rango(A^*) \rightarrow Sistema\ Incompatible.$$

Ya has acabado la primera parte del ejercicio, discutir el sistema, ahora tienes que dar la solución cuando $a = 1$.

Como puedes comprobar, estas trabajando en este caso con un sistema compatible determinado, es decir, tiene una única solución, por tanto, te recomiendo que lo hagas con Cramer.

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$AX + BY + CZ = U \quad donde\ A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ ;\ C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\ y\ U = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para dar las soluciones del sistema vamos a utilizar la regla de Cramer:

$$x = \frac{|UBC|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2-4}{-1+3-4+3+2-2} = \frac{-6}{1} = -6$$

$$y = \frac{|AUC|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{6+4}{1} = 10$$

$$z = \frac{|ABU|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{8-6}{1} = 2$$

JUNIO 2017 A1.- Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m. No tienes que resolverlo.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ 3x + y - mz = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2x + y - z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ 3x + y - mz = 3 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -m & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula el determinante de la matriz de coeficientes, a lo que llamas A.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{vmatrix} = -2m^2 + 3 - 1 + 3m + m - 2 \rightarrow -2m^2 + 4m = 0 \rightarrow$$

$$m(-2m + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

Ahora tienes que estudiar el resultado del sistema en función de los valores que has obtenido de m al igualar a cero el determinante de la matriz de coeficientes.

Recuerda que, si te salen dos resultados, vas a tener tres casos, siempre un caso mas que el numero de resultados.

- $m \neq 0 \; y \; m \neq 2$

$$para\ este\ caso\ puedes\ coger\ como\ norma\ que\ siemore\ \ vas\ a\ estar\ trabajando\ con\ un\ S.C.D \rightarrow Solo\ existe\ una\ solución.$$

$$\text{Det}(A_{3x3}) \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 3$$

$$Det(A^*_{3x3}) \neq 0 \rightarrow Rango\ (A^*) = 3$$

- $m = 0$

Ahora vas a estudiar que ocurre cuando m toma el valor de cero. Recuerda que este valor es uno de los valores que hace que el determinante sea cero, por tanto,

$$\text{Det}(A_{3x3}) = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Ahora tienes que buscar una matriz 2x2 dentro de la matriz de coeficientes que sea distinto de cero para poder afirmar que el rango de A es dos.

Te he marca en amarillo la matriz que voy a coger para comprobar que el rango es dos:

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 2$$

Ahora cuando ya has comprobado que el rango de A es dos, tienes que calcular el rango de la matriz ampliada, para eso tienes que utilizar las dos columnas (Amarillo) que has cogido para hacer el determinante 2x2 de la matriz A y la columna de la ampliada.

$$\det(A^*_{3x3}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 1 - 0 - 3 - 4 = 0 \rightarrow Rango\ (A^*) < 3 \rightarrow Rango\ (A^*) = 2$$

Como los rangos son iguales pero distinto del numero de incógnitas estas trabajando con un sistema compatible indeterminado, infinitas soluciones.

- $m = 2$

Ahora vas a estudiar que ocurre cuando m toma el valor de dos. Recuerda que este valor es uno de los valores que hace que el determinante sea cero, por tanto,

$$\mathrm{Det}(A_{3x3}) = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Ahora tienes que buscar una matriz 2x2 dentro de la matriz de coeficientes que sea distinto de cero para poder afirmar que el rango de A es dos.

Te he marca en amarillo la matriz que voy a coger para comprobar que el rango es dos:

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 2$$

Ahora cuando ya has comprobado que el rango de A es dos, tienes que calcular el rango de la matriz ampliada, para eso tienes que utilizar las dos columnas (Amarillo) que has cogido para hacer el determinante 2x2 de la matriz A y la columna de la ampliada.

$$\det(A^*) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 6 + 1 - 9 - 3 - 4 = 0 \rightarrow Rango\ (A^*) = 3$$

Como los rangos son distintos estas trabajando con un sistema incompatible, no tiene soluciones.

JUNIO 2017 B1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$

¿Para que valores de m la matriz A posee inversa? Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro m.

Hallar el valor de m para que se cumpla la igualdad $A^2 = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lo primero, recuerda, para que una matriz pueda tener inversa, su determinante tiene que ser distinto cero, por tanto, esta matriz no tendrá inversa para los valores de m que hagan cero su determinante:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = -2m^2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 \rightarrow -2m^2 = 0 \rightarrow m = 0$$

El único valor que no puede tener m es cero, ya que para este valor la matriz A no tiene inversa. Para el resto de los valores la matriz A tiene inversa.

Ahora para estudiar el rango de la matriz A,

$$\begin{cases} m = 0 \rightarrow RangoA = \ 1 \ ya\ que\ solo\ existe\ una\ fila\ distinta\ de\ cero. \\ m \neq 0 \rightarrow Rango = \ 3 \end{cases}$$

JULIO 2017 A1.- Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a:

$$\begin{cases} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{cases}$$

En caso de existir, encontrar la solución para el caso de $a = 0$.

$$\begin{matrix} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 2 & 6 & 0 \\ 2 & a & 4 & 2 \\ 2 & a & 6 & a-2 \end{pmatrix}$$

Calcula el determinante de la matriz de coeficientes, a lo que llamas A.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{vmatrix} = 6a^2 + 16 + 12a - 12a - 24 - 4a^2 \rightarrow 2a^2 - 8 = 0 \rightarrow a = \pm 2$$

Ahora tienes que estudiar el resultado del sistema en función de los valores que has obtenido de m al igualar a cero el determinante de la matriz de coeficientes.

Recuerda que, si te salen dos resultados, vas a tener tres casos, siempre un caso mas que el numero de resultados.

- $a \neq 2 \ y \ a \neq -2$

$para\ este\ caso\ puedes\ coger\ como\ norma\ que\ siemore\ \ vas\ a\ estar\ trabajando\ con\ un\ S.C.D$
$\rightarrow Solo\ existe\ una\ solución.$

$$\mathrm{Det}(A_{3x3}) \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 3$$

$$Det(A^*_{3x3}) \neq 0 \rightarrow Rango\ (A^*) = 3$$

- $a = 2$

Ahora vas a estudiar que ocurre cuando m toma el valor de cero. Recuerda que este valor es uno de los valores que hace que el determinante sea cero, por tanto,

$$\mathrm{Det}(A_{3x3}) = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Ahora tienes que buscar una matriz 2x2 dentro de la matriz de coeficientes que sea distinto de cero para poder afirmar que el rango de A es dos.

Te he marca en amarillo la matriz que voy a coger para comprobar que el rango es dos:

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Tienes\ que\ comprobar\ otro\ determinante;$$

Ahora te lo he subrayado en verde para ver si el rango es dos:

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 8 = 4 \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 2$$

Ahora cuando ya has comprobado que el rango de A es dos, tienes que calcular el rango de la matriz ampliada, para eso tienes que utilizar las dos columnas (Amarillo) que has cogido para hacer el determinante 2x2 de la matriz A y la columna de la ampliada.

$$\det(A^*_{3x3}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Rango\ (A^*) < 3 \rightarrow Rango\ (A^*) = 2$$

Como los rangos son iguales pero distinto del numero de incógnitas estas trabajando con un sistema compatible indeterminado, infinitas soluciones.

- $a = -2$

Ahora vas a estudiar que ocurre cuando m toma el valor de dos. Recuerda que este valor es uno de los valores que hace que el determinante sea cero, por tanto,

$$\mathrm{Det}(A_{3x3}) = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Ahora tienes que buscar una matriz 2x2 dentro de la matriz de coeficientes que sea distinto de cero para poder afirmar que el rango de A es dos.

Te he marca en amarillo la matriz que voy a coger para comprobar que el rango es dos:

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Tienes\ que\ comprobar\ otro\ determinante$$

Ahora te lo he subrayado en verde para ver si el rango es dos:

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -12 + 8 = -4 \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 2$$

Ahora cuando ya has comprobado que el rango de A es dos, tienes que calcular el rango de la matriz ampliada, para eso tienes que utilizar las dos columnas (Amarillo) que has cogido para hacer el determinante 2x2 de la matriz A y la columna de la ampliada.

$$\det(A^*_{3x3}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow Rango\ (A^*) = 3$$

Como los rangos son distintos estas trabajando con un sistema incompatible, no tiene soluciones.

Para terminar el ejercicio, tienes que resolver el sistema cuando $a = 0$.

$$\begin{array}{r} +2y + 6z = 0 \\ 2x + 4z = 2 \\ 2x + +6z = -2 \end{array} \rightarrow Como\ estas\ trabajando\ en\ el\ caso\ a \neq 2\ y\ m \neq -2 \rightarrow S.C.D \rightarrow Cramer$$

$$AX + BY + CZ = U \quad donde\ A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ C = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \ y\ U = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Para dar las soluciones del sistema vamos a utilizar la regla de Cramer:

$$x = \frac{|UBC|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{-16 - 24}{0 + 16 + 0 - 0 - 24 - 0} = \frac{-40}{-8} = 5$$

$$y = \frac{|AUC|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{-48}{-8} = 6$$

$$z = \frac{|ABU|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{16}{-8} = -2$$

JULIO 2017 B1.- Calcula para que valor, o valores, de x admite inversa la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En caso de existir, calcula la inversa de A para $x = -3$

Lo primero y mas importante es conocer la teoría sobre las matrices que pueden ser invertibles, es decir, para que puedas calcular la inversa de una matriz, su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 - x^2 - 0 - 0 - 1 \rightarrow -x^2 + 5 = 0 \rightarrow$$

$$x^2 = 5 \rightarrow x = \begin{cases} \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{cases}$$

Entonces, con lo que acabas de calcular puedes deducir lo siguiente:

$$\begin{cases} Para\ x = \sqrt{5}\ y\ x = -\sqrt{5} \rightarrow La\ matriz\ no\ tiene\ inversa \\ Para\ x \neq \sqrt{5}\ y\ x \neq -\sqrt{5} \rightarrow La\ matriz\ tiene\ inversa \end{cases}$$

Ahora El ejercicio te pide que calcules la inversa para $x = -3$

Lo primero que tienes que hacer es copiar el ejercicio cambiando el parámetro por el valor que te dicen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo siguiente para resolver con éxito este ejercicio es conocer la formula del calculo de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{adj})^t$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

Ahora tienes que calcular la matriz de adjunto:

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 3 & -18 & -5 \\ -1 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora tienes que hacer la traspuesta de la matriz de adjuntos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 3 & -18 & -5 \\ -1 & 10 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 6 & -18 & 10 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente;

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{adj})^t \rightarrow \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 6 & -18 & 10 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

JUNIO 2016 A1.- Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro b. No es necesario resolverlo en ningún caso:

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+(1+b)y-bz=2b \\ x+by+(1+b)z=1 \end{cases}$$

Lo primero que tienes que hacer para poder empezar a resolver este tipo de ejercicios es transformar el sistema en una matriz:

$$\begin{matrix} x+2y-z=2 \\ x+(1+b)y-bz=2b \\ x+by+(1+b)z=1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{pmatrix}$$

Como siempre, ahora tienes que calcular el determinante de la matriz de coeficientes para sacar los valores con los que harás el estudio:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix}=1+2b+b^2-2b-b+1+b-2-2b+b^2 \rightarrow$$

$$2b^2-2b=0 \rightarrow b=\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Ahora como te han salido dos valores al igualar a cero el determinante, tienes tres casos que estudiar;

- $b \neq 0 \; y \; b \neq 1$

$$para\ este\ caso\ puedes\ coger\ como\ norma\ que\ siemore\ \ vas\ a\ estar\ trabajando\ con\ un\ S.C.D \rightarrow Solo\ existe\ una\ solución.$$

$$\mathrm{Det}(A_{3x3}) \neq 0 \rightarrow Rango\ (A)=3$$

$$Det(A^*_{3x3}) \neq 0 \rightarrow Rango\ (A^*)=3$$

- $b=0$

Ahora vas a estudiar que ocurre cuando b toma el valor de cero. Recuerda que este valor es uno de los valores que hace que el determinante sea cero, por tanto,

$$\mathrm{Det}(A_{3x3}) = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Ahora tienes que buscar una matriz 2x2 dentro de la matriz de coeficientes que sea distinto de cero para poder afirmar que el rango de A es dos.

Te he marca en morado la matriz que voy a coger para comprobar que el rango es dos:

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \rightarrow rango\ (A) = 2$$

Ahora cuando ya has comprobado que el rango de A es dos, tienes que calcular el rango de la matriz ampliada, para eso tienes que utilizar las dos columnas (Amarillo) que has cogido para hacer el determinante 2x2 de la matriz A y la columna de la ampliada.

$$\det(A^*_{3x3}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 2 - 2 - 0 = -3 \neq 0 \rightarrow Rango\ (A^*) = 3$$

Como los rangos son distintos estas trabajando con un sistema incompatible, no tiene soluciones.

- $b = 1$

Ahora vas a estudiar que ocurre cuando m toma el valor de dos. Recuerda que este valor es uno de los valores que hace que el determinante sea cero, por tanto,

$$\mathrm{Det}(A_{3x3}) = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Ahora tienes que buscar una matriz 2x2 dentro de la matriz de coeficientes que sea distinto de cero para poder afirmar que el rango de A es dos.

Te he marca en morado la matriz que voy a coger para comprobar que el rango es dos:

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Tienes\ que\ comprobar\ otro\ determinante$$

Ahora te lo he subrayado en verde para ver si el rango es dos:

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 2$$

Ahora cuando ya has comprobado que el rango de A es dos, tienes que calcular el rango de la matriz ampliada, para eso tienes que utilizar las dos columnas (Amarillo) que has cogido para hacer el determinante 2x2 de la matriz A y la columna de la ampliada.

$$\det(A^*_{3x3}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 8 + 2 + 2 - 8 = 0 \rightarrow Rango\ (A^*) < 3$$

Por tanto, como ya hemos demostrado anteriormente el rango de la matriz ampliada podemos afirmar que es 2. Es decir $rango\ (A^*) = 2$

Como los rangos son iguales pero distinto del numero de incógnitas, estas trabajando con un sistema compatible indeterminado tiene infinitas soluciones.

JUNIO 2016 B1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Encontrar los valores del parámetro a para que la matriz NO sea invertible.

En caso de existir, calcula la inversa de A para $a = 2$

Lo primero y mas importante es conocer la teoría sobre las matrices que pueden ser invertibles, es decir, para que puedas calcular la inversa de una matriz, su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2a^2 - a + 2 - 2 + a^2 - 2a + 2 - 2a \rightarrow 3a^2 - 5a + 2 = 0 \rightarrow$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(3)(2)}}{6} \rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

Entonces, con lo que acabas de calcular puedes deducir lo siguiente:

$$\begin{cases} Para\ a = 1\ y\ a = \frac{2}{3} \rightarrow La\ matriz\ no\ tiene\ inversa \\ Para\ a \neq 1\ y\ a \neq \frac{2}{3} \rightarrow La\ matriz\ tiene\ inversa \end{cases}$$

Ahora El ejercicio te pide que calcules la inversa para $a = 2$

Lo primero que tienes que hacer es copiar el ejercicio cambiando el parámetro por el valor que te dicen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lo siguiente para resolver con éxito este ejercicio es conocer la formula del calculo de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{adj})^t$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 - 2 - 0 + 2 - 4 = 4$$

Ahora tienes que calcular la matriz de adjunto:

$$A_{adj}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ahora tienes que hacer la traspuesta de la matriz de adjuntos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Finalmente;

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(A_{adj})^t \rightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

JULIO 2016 A1.- Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro b

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + bz = -3 \\ x - 2y - z = b \end{cases}$$

Encontrar la solución, si existe, para el caso $b = 2$.

Lo primero que tienes que hacer para poder empezar a resolver este tipo de ejercicios es transformar el sistema en una matriz:

$$\begin{matrix} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + bz = -3 \\ x - 2y - z = b \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & b & -3 \\ 1 & -2 & -1 & b \end{pmatrix}$$

Como siempre, ahora tienes que calcular el determinante de la matriz de coeficientes para sacar los valores con los que harás el estudio:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & b \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + b + 2 - 2 - 1 + 2b \rightarrow 3b - 3 = 0 \rightarrow b = 1$$

Ahora como te ha salido un valor al igualar a cero el determinante, tienes dos casos que estudiar;

- $b \neq 1$

$$para\ este\ caso\ puedes\ coger\ como\ norma\ que\ siemore\ \ vas\ a\ estar\ trabajando\ con\ un\ S.C.D \rightarrow Solo\ existe\ una\ solución.$$

$$\text{Det}(A_{3x3}) \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 3$$

$$Det(A^*_{3x3}) \neq 0 \rightarrow Rango\ (A^*) = 3$$

- $b = 1$

Ahora vas a estudiar que ocurre cuando b toma el valor de uno. Recuerda que este valor es el que hace que el determinante sea cero, por tanto,

$$\text{Det}(A_{3x3}) = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Ahora tienes que buscar una matriz 2x2 dentro de la matriz de coeficientes que sea distinto de cero para poder afirmar que el rango de A es dos.

Te he marca en morado la matriz que voy a coger para comprobar que el rango es dos:

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0 \rightarrow rango\ (A) = 2$$

Ahora cuando ya has comprobado que el rango de A es dos, tienes que calcular el rango de la matriz ampliada, para eso tienes que utilizar las dos columnas (Amarillo) que has cogido para hacer el determinante 2x2 de la matriz A y la columna de la ampliada.

$$\det(A^*_{3x3}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 + 0 - 0 + 1 - 6 = -6 \neq 0 \rightarrow Rango\ (A^*) = 3$$

Como los rangos son distintos estas trabajando con un sistema incompatible, no tiene soluciones.

<u>Para terminar el ejercicio, tienes que resolver el sistema cuando $b = 2$.</u>

$$\begin{matrix} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 2z = -3 \\ x - 2y - z = 2 \end{matrix} \rightarrow Como\ estas\ trabajando\ en\ el\ caso\ b \neq 1 \rightarrow S.C.D \rightarrow Cramer$$

$$AX + BY + CZ = U \quad donde\ A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\ ;\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\ y\ U = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para dar las soluciones del sistema vamos a utilizar la regla de Cramer:

$$x = \frac{|UBC|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y = \frac{|AUC|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0$$

$$z = \frac{|ABU|}{|ABC|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{3} = -1$$

JULIO 2016 B1.-Determina el rango de la matriz A según los valores del parámetro a:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ a & a-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

En caso de existir, calcula la inversa de A para $a = 1$. Si no existe tal inversa explica porqué.

Para determinar el rango en función del parámetro a, primero tienes que calcular el determinante:

$$\det(a) = |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & a \\ a & a-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -a + 3 + 2a^2 - 2a - 2 \rightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(1)}}{4} \rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Entonces, ahora cuando ya tienes los valores que hacen cero el determinante, vas a realizar el estudio del rango en función de dichos parámetros:

- $a \neq 1 \; y \; a \neq \frac{1}{2}$

$\det(A) \neq 0 \rightarrow Rango\ Maximo\ y\ como\ estas\ trabajando\ con\ una\ matriz\ 3x3 \rightarrow Rango(A) = 3$

- $a = 1$

$$\det(A) = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Tienes que buscar un determinante 2x2 que sea distinto de cero para confirmar que el rango es 2.

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0 \rightarrow Tienes\ que\ seguir\ buscando.$$

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \rightarrow Sigue\ buscando.$$

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 2$$

- $a = \frac{1}{2}$

$$\det(A) = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Tienes que buscar un determinante 2x2 que sea distinto de cero para confirmar que el rango es 2.

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} -5/2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-5}{2} + 2 \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 2$$

Para responder a la pregunta siguiente del ejercicio, simplemente tendrías que decir que no se puede calcular la inversa de esta matriz cuando el parámetro a toma el valor uno, ya que el valor de su determinante es cero, es decir no existe inversa cuando el determinante es cero.

JUNIO 2015 A1.- Se sabe que $\begin{vmatrix} A & B & C \\ P & Q & R \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 10$. Calcula de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor de los siguientes determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 2A & 2B & 2C \\ A+P & B+Q & C+R \\ -X+A & -Y+B & -Z+C \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 3P & 3Q & 3R \\ 2A & 2B & 2C \\ -X & -Y & -Z \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2A & 2B & 2C \\ A+P & B+Q & C+R \\ -X+A & -Y+B & -Z+C \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$A = \begin{vmatrix} 2A & 2B & 2C \\ A & B & C \\ -X+A & -Y+B & -Z+C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2A & 2B & 2C \\ P & Q & R \\ -X+A & -Y+B & -Z+C \end{vmatrix}$$

El primer determinante es cero ya que la primera y segunda fila son proporcionales, entonces,

$$A = \begin{vmatrix} 2A & 2B & 2C \\ P & Q & R \\ -X+A & -Y+B & -Z+C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2A & 2B & 2C \\ P & Q & R \\ -X & -Y & -Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2A & 2B & 2C \\ P & Q & R \\ A & B & C \end{vmatrix} \rightarrow$$

El segundo determinante es cero ya que primera y tercera fila son proporcionales, entonces:

$$\begin{vmatrix} 2A & 2B & 2C \\ P & Q & R \\ -X & -Y & -Z \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} A & B & C \\ P & Q & R \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = -2(10) = -20$$

$$B = \begin{vmatrix} 3P & 3Q & 3R \\ 2A & 2B & 2C \\ -X & -Y & -Z \end{vmatrix} = (3)(2)(-1)\begin{vmatrix} P & Q & R \\ A & B & C \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (-1)(3)(2)(-1)\begin{vmatrix} A & B & C \\ P & Q & R \\ X & Y & Z \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(3)(2)(-1)(10) = 60$$

JUNIO 2015 B1.- Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y - z = -4 \\ 3x + ay + z = a - 1 \\ 2x + ay = -2 \end{cases}$$

Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

Resolver el sistema en el caso o casos de indeterminación.

¿Existe algún valor de a tal que el sistema no tenga solución? Razona la respuesta.

Lo primero que tienes que hacer para poder empezar a resolver este tipo de ejercicios es transformar el sistema en una matriz:

$$\begin{matrix} x + y - z = -4 \\ 3x + ay + z = a - 1 \\ 2x + ay = -2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & a & 1 & a-1 \\ 2 & a & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Como siempre, ahora tienes que calcular el determinante de la matriz de coeficientes para sacar los valores con los que harás el estudio:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & 1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 - 3a + 2a - a = 0 \rightarrow -2a + 2 = 0 \rightarrow a = 1$$

Ahora como te ha salido un valor al igualar a cero el determinante, tienes dos casos que estudiar;

- $a \neq 1$

$$para\ este\ caso\ puedes\ coger\ como\ norma\ que\ siemore\ \ vas\ a\ estar\ trabajando\ con\ un\ S.C.D \rightarrow Solo\ existe\ una\ solución.$$

$$\mathrm{Det}(A_{3x3}) \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 3$$

$$Det(A^*_{3x3}) \neq 0 \rightarrow Rango\ (A^*) = 3$$

- $a = 1$

Ahora vas a estudiar que ocurre cuando b toma el valor de uno. Recuerda que este valor es el que hace que el determinante sea cero, por tanto,

$$\mathrm{Det}(A_{3x3}) = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Ahora tienes que buscar una matriz 2x2 dentro de la matriz de coeficientes que sea distinto de cero para poder afirmar que el rango de A es dos.

Te he marca en morado la matriz que voy a coger para comprobar que el rango es dos:

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0 \rightarrow rango\ (A) = 2$$

Ahora cuando ya has comprobado que el rango de A es dos, tienes que calcular el rango de la matriz ampliada, para eso tienes que utilizar las dos columnas (Amarillo) que has cogido para hacer el determinante 2x2 de la matriz A y la columna de la ampliada.

$$\det(A^*_{3x3}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 12 + 8 + 6 = 0 \rightarrow Rango\ (A^*) < 3$$

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0 \rightarrow rango\ (A^*) = 2$$

Como los rangos son iguales pero distinto del numero de incógnitas, estas trabajando con un sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Para terminar el ejercicio quiere que calcules la respuesta para un sistema compatible indeterminado, es decir, cuando tiene infinitas soluciones:

Para eso, siempre tienes que seguir este procedimiento;

1. Quitar la fila del sistema que no utilices para demostrar que el rango de A es dos.
2. Llama a la incógnita $z = t$
3. Pasa el parámetro t al otro lado de la igualdad y finalmente resuelve un sistema de ecuaciones con dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\begin{cases} x+y-z=-4 \\ 3x+y+z=-1 \\ 2x+y=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x+y-z=-4 \\ 3x+y+z=-1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x+y=-4+t \\ 3x+y=-1-t \end{matrix}$$

$$-2x=-3+2t \rightarrow x=\frac{-3+2t}{-2}$$

Finalmente sabiendo el parámetro x, puedes determinar el valor del parámetro y.

$$x+y=-4+t \rightarrow y=-4+t-\frac{-3+2t}{-2} \rightarrow y=\frac{8-2t-3+2t}{-2} \rightarrow y=\frac{5}{-2}$$

Para responder a la última pregunta que te hace el ejercicio, tienes que decir que NO, no existe ningún valor de a que haga que el sistema sea incompatible.

JULIO 2015 A1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ calcular que valor debe tener x para que la matriz inversa de A coincida con la opuesta de A (esto es $A^{-1} = -A$)

Empieza calculando la inversa de la matriz A, en este caso lo hare utilizando los conocimientos acerca de los determinantes:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A_{adj}\right)^t$$

$$|A| = \begin{vmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 10$$

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} -x & -5 \\ 2 & x \end{pmatrix} \to \left(A_{adj}\right)^t = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-x^2 + 10} \cdot \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}$$

Ahora quiero que determines cual es la matriz $-A$

$$-A = -\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}$$

Para terminar tienes que igualar la matriz inversa con la matriz opuesta de A:

$$\frac{1}{-x^2 + 10} \cdot \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}$$

Ahora recuerda que tienes que igualar elemento a elemento las matrices:

$$\begin{cases} \dfrac{-x}{-x^2+10} = -x \\ \dfrac{2}{-x^2+10} = 2 \\ \dfrac{-5}{-x^2+10} = -5 \\ \dfrac{x}{-x^2+10} = x \end{cases} \to \frac{-x}{-x^2+10} = -x \to -x = x^3 - 10x \to x^3 - 9x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \end{cases}$$

$$\frac{2}{-x^2+10} = 2 \to 2 = -2x^2 + 20 \to x = \pm 3$$

Como podemos comprobar el único valor que funciona en todas las ocasiones es $x = \pm 3$

Lo mas complicado de este ejercicio es el calculo de la inversa en función de x.

JULIO 2015 B1.- discute en función del parámetro m el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + my = 1 \\ 3x + mz = m - 2 \\ -y + z = m - 3 \end{cases}$$

¿Existe casos de indeterminación? Si la respuesta es afirmativa resolver el sistema en esos casos. Si es negativa explicar porqué.

Lo primero que tienes que hacer es transformar el sistema en una matriz;

$$\begin{cases} mx + my = 1 \\ 3x + mz = m - 2 \\ -y + z = m - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} m & m & 0 & 1 \\ 3 & 0 & m & m-2 \\ 0 & -1 & 1 & m-3 \end{pmatrix}$$

Ahora tienes, como siempre, que calcular el determinante de la matriz de coeficientes:

$$det\ (A) = \begin{vmatrix} m & m & 0 \\ 3 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3m + m^2 = 0 \rightarrow m(-3+m) = 0 \rightarrow m = \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}$$

- $m \neq 0\ y\ m \neq 3$

$$para\ este\ caso\ puedes\ coger\ como\ norma\ que\ siemore\ \ vas\ a\ estar\ trabajando\ con\ un\ S.C.D \rightarrow Solo\ existe\ una\ solución.$$

$$\text{Det}(A_{3x3}) \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 3$$

$$Det(A^*_{3x3}) \neq 0 \rightarrow Rango\ (A^*) = 3$$

- $m = 0$

Ahora vas a estudiar que ocurre cuando m toma el valor de cero. Recuerda que este valor es el que hace que el determinante sea cero, por tanto,

$$\text{Det}(A_{3x3}) = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Ahora tienes que buscar una matriz 2x2 dentro de la matriz de coeficientes que sea distinto de cero para poder afirmar que el rango de A es dos.

Te he marca en morado la matriz que voy a coger para comprobar que el rango es dos:

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow rango\ (A) = 2$$

Ahora cuando ya has comprobado que el rango de A es dos, tienes que calcular el rango de la matriz ampliada, para eso tienes que utilizar las dos columnas (Amarillo) que has cogido para hacer el determinante 2x2 de la matriz A y la columna de la ampliada.

$$\det(A^*_{3x3}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 \rightarrow Rango\ (A^*) = 3$$

Como los rangos son distintos, estas trabajando con un sistema incompatible, no tiene solución.

- $m = 3$

Ahora vas a estudiar que ocurre cuando m toma el valor de tres. Recuerda que este valor es el que hace que el determinante sea cero, por tanto,

$$\text{Det}(A_{3x3}) = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

Ahora tienes que buscar una matriz 2x2 dentro de la matriz de coeficientes que sea distinto de cero para poder afirmar que el rango de A es dos.

Te he marca en amarillo la matriz que voy a coger para comprobar que el rango es dos:

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow rango\ (A) = 2$$

Ahora cuando ya has comprobado que el rango de A es dos, tienes que calcular el rango de la matriz ampliada, para eso tienes que utilizar las dos columnas (Amarillo) que has cogido para hacer el determinante 2x2 de la matriz A y la columna de la ampliada.

$$\det(A^*_{3x3}) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0 \rightarrow Rango\ (A^*) < 3$$

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow rango\ (A^*) = 2$$

Como los rangos son iguales pero distinto del numero de incógnitas, estas trabajando con un sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

JUNIO 2014 A1.- Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - 2y - z = -1 \\ ax - y + 2z = 2 \\ x + 2y + az = 3 \end{cases}$$

Discutir el sistema según los valores del parámetro a

Resolver el sistema cuando tenga mas de una solución

¡PRUEBA TU!

Te dejo aquí las soluciones sin el procedimiento para que puedas comprobar si lo estas haciendo bien. Recuerda que solo tienes que seguir los mismos pasos que hemos estado haciendo hasta ahora.

El determinante $|A| = 2a^2 - 3a - 9 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -\frac{3}{2} \end{cases}$

$$\boldsymbol{a \neq 3 \; y \; a \neq -\frac{3}{2} \rightarrow Sistema\ compatible\ determinado}$$

$$\boldsymbol{a = 3 \rightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado}$$

$$\boldsymbol{a = -\frac{3}{2} \rightarrow Sistema\ incompatible}$$

Cuando $\boldsymbol{a = 3}$ la solución o infinitas soluciones que tiene el sistema son: $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{1 - t})$

SI NECESITAS MAS AYUDA CON EL EJERCICIO NO DUDES Y PONTE EN CONTACTO CONMIGO 688-820-933

JUNIO 2014 B1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$

Determinar para que valores del parámetro a la matriz A no tiene inversa.

Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $a = -2$, y en caso de que no sea posible razonar porqué.

Recuerda, una matriz tiene inversa siempre que su determinante sea distinto de cero, por tanto, tienes que calcular el determinante de la matriz e igualarlo a cero. Para los valores que obtengas, la matriz no tendrá inversa, para el resto de los valores, si.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 - a^2 - a^2 \to -a^2 + 1 = 0 \to a = \pm 1$$

Por tanto, tal y como hemos dicho antes, para $a = \pm 1$ la matriz no tiene inversa, para el resto de los valores si que tiene.

Ahora tienes que calcular la inversa para $a = -2$. Lo hare aplicando los conocimientos acerca de los determinantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A_{adj}\right)^t$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \left(A_{adj}\right)^t = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

JULIO 2014 A1.- Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -x + my + 2z = m \\ 2x + my - z = 2 \\ mx - y + 2z = m \end{cases}$$

Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

Para $m = -1$ resolver en caso de que sea posible. Si es imposible explicar por qué.

¡PRUEBA TU!

Te dejo aquí las soluciones sin el procedimiento para que puedas comprobar si lo estas haciendo bien. Recuerda que solo tienes que seguir los mismos pasos que hemos estado haciendo hasta ahora.

El determinante $|A| = 3m^2 - 6m - 3 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow m = -1$

$$\boldsymbol{m \neq -1 \rightarrow Sistema\ compatible\ determinado}$$

$$\boldsymbol{m = -1 \rightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado}$$

Cuando $\boldsymbol{m = -1}$ la solución o infinitas soluciones que tiene el sistema son: $(\boldsymbol{t+1}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t})$

SI NECESITAS MAS AYUDA CON EL EJERCICIO NO DUDES Y PONTE EN CONTACTO CONMIGO 688-820-933

JULIO 2014 B1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} c+d & d \\ 2c & c+d \end{pmatrix}$

Determinar para que valores de c y d la matriz A tiene inversa.

Determinar la inversa de la matriz A^2 en el caso $c = 1\,; d = -2$.

Recuerda que para que una matriz tenga inversa, el determinante de la matriz tiene que ser distinto de cero, por tanto, iguala a cero el determinante y para los valores que te salgan no tendrá inversa, para el resto si que tendrá.

$$\mathbf{de\,t(A) = |A| = \begin{vmatrix} c+d & d \\ 2c & c+d \end{vmatrix} = (c+d)^2 - 2cd \to c^2 + 2cd + d^2 - 2cd \to c^2 + d^2 = 0}$$

$$\to \boldsymbol{Esto\ quiere\ decir\ que\ para\ cualquier\ valor\ disitnto\ de\ c\ y\ d}$$

$$\boldsymbol{igual\ a\ cero\ existira\ la\ inversa\ de\ A}$$

Ahora tienes que calcular la inversa de la matriz cuando $c = 1\,; d = -2 \to A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Puedes seguir el procedimiento que mejor domines para el calculo de la inversa de la matriz A:

$$\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = I \to \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -a-2c & -b-2d \\ 2a-c & 2b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\begin{cases} -a-2c = 1 \\ 2a-c = 0 \\ -b-2d = 0 \\ 2b-d = 1 \end{cases} \to}$$

Ahora con las dos ecuaciones amarillas haces un sistema:

$$\boldsymbol{\begin{cases} -a-2c = 1 \\ 2a-c = 0 \end{cases} \to \begin{cases} -2a-4c = 2 \\ 2a-c = 0 \end{cases} \to -5c = 2 \to c = -\frac{2}{5}}$$

$$\boldsymbol{-a - 2\left(-\frac{2}{5}\right) = 1 \to -a + \frac{4}{5} = 1 \to a = -\frac{1}{5}}$$

Con las dos ecuaciones verdes tienes que hacer otro sistema:

$$\boldsymbol{\begin{cases} -b-2d = 0 \\ 2b-d = 1 \end{cases} \to \begin{cases} -2b-4d = 0 \\ 2b-d = 1 \end{cases} \to -5d = 1 \to d = -\frac{1}{5}}$$

$$\boldsymbol{2b + \frac{1}{5} = 1 \to b = \frac{2}{5}}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}$$

JUNIO 2013 A1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$ donde a es un parámetro real.

Calcular razonadamente el rango de la matriz A en función del parámetro a.

Explicar razonadamente el rango de la matriz para el caso $a = 1$ y en caso de que exista la inversa calcularla.

Lo primero que tienes que hacer es igualar a cero el determinante de la matriz A, para que, con los valores que obtengas de la ecuación resultante $|A| = 0$, hagas el estudio del rango.

$$Det\ (A) = |A| = -a(a^2-1) - 2a \rightarrow \det(A) = -a^3 + a - 2a \rightarrow Det(A) = -a^3 - a$$

Igualamos a cero el resultado…

$$-a^3 - a = 0 \rightarrow a(-a^2 - a) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -a^2 - 1 = 0 \rightarrow a = \sqrt{-1} \rightarrow No\ tiene\ solución \end{cases}$$

Vamos a realizar el estudio en función del parámetro a:

- $a = 0$

$$Det(A) = 0 \rightarrow Rango(A) \leq 2$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix} \rightarrow a = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Mediante Gauss, vamos a comprobar el rango de A.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = 2F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como tenemos dos filas distintas de cero el rango de (A) es dos.

- $a \neq 0$

$Det(A) \neq 0$ por lo tanto, el rango de A es máximo, es este caso, tres.

Para $a = 1$ si que tiene inversa la matriz A, puesto que, en la discusión del rango en función de a, podemos observar que, cuando $a \neq 0$ el determinante es distinto de cero y que por tanto si que tiene inversa, ya que, cuando el determinante de una matriz es distinto de cero, dicha matriz si tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A_{adj}\right)^t$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \ (A_{adj})^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

JUNIO 2013 B1.- Dado el sistema

$$\begin{cases} mx + my + 2z = m \\ x + (m-2)y = -1 \\ 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

Discutirlo según los valores del parámetro m

Resolverlo, si es posible, para $m = 5$.

¡PRUEBA TU!

Te dejo aquí las soluciones sin el procedimiento para que puedas comprobar si lo estas haciendo bien. Recuerda que solo tienes que seguir los mismos pasos que hemos estado haciendo hasta ahora.

El determinante $|A| = 2(m-1)(m-2) \rightarrow |A| = 0 \rightarrow m = \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$

$$\boldsymbol{m \neq 1 \ y \ m \neq 2 \rightarrow Sistema\ compatible\ determinado}$$

$$\boldsymbol{m = 1 \rightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado}$$

$$m = 2 \rightarrow Sistema\ incompatible$$

Cuando $\boldsymbol{m = 5}$ la solución: $(\mathbf{1}, -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, \frac{5}{3})$

SI NECESITAS MAS AYUDA CON EL EJERCICIO NO DUDES Y PONTE EN CONTACTO CONMIGO 688-820-933

JULIO 2013 A1.- dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ ay - z = -1 \\ x + 2ay = 0 \end{cases}$$

Discutirlo según los distintos valores de a

Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

¡PRUEBA TU!

SI NECESITAS MAS AYUDA CON EL EJERCICIO NO DUDES Y PONTE EN CONTACTO CONMIGO 688-820-933

Te dejo aquí las soluciones sin el procedimiento para que puedas comprobar si lo estas haciendo bien. Recuerda que solo tienes que seguir los mismos pasos que hemos estado haciendo hasta ahora.

El determinante $|A| = -(a-1)^2 = 0 \rightarrow a = 1$

$$\boldsymbol{a \neq 1 \ \rightarrow Sistema\ compatible\ determinado}$$

$$\boldsymbol{a = 1 \rightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado}$$

Piden resolverlo cuando es compatible indeterminado, por tanto,

$$\boldsymbol{\begin{matrix} x + y = 1 - t \\ y = -1 + t \end{matrix} \rightarrow en\ definitiva \rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}}$$

JULIO 2013 B1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & m \\ m & 1 & 3 \\ 1 & 7 & m \end{pmatrix}$

Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro m.

Para $m = 0$ halla la matriz inversa de A.

Calcula el determinante de la matriz en función del parámetro m:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & m \\ m & 1 & 3 \\ 1 & 7 & m \end{vmatrix} = m + 9 + 7m^2 - m - 3m^2 - 21 \rightarrow 4m^2 - 12 = 0$$

$$\rightarrow m = \pm\sqrt{3}$$

Por tanto;

- $m \neq \pm\sqrt{3}$

$$det(A) \neq 0 \rightarrow Rango\ (A) = 3$$

- $m = \pm\sqrt{3}$

$$det(A) = 0 \rightarrow Rango\ (A) < 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \pm\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} 1 \pm 3\sqrt{3} \neq 0 \rightarrow Por\ tanto, rango\ (A) = 2$$

Ahora para $m = 0$ halla la matriz inversa de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A_{adj}\right)^t$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(A_{adj}\right)^t = \begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

JUNIO 2012 A1.- Dado el sistema

$$\begin{cases} x+(A+1)y+Az=A+1 \\ Ay+z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$$

Discutirlo según los valores del parámetro A

Resolverlo, si es posible, para el caso $A=4$.

¡PRUEBA TU!

SI NECESITAS MAS AYUDA CON EL EJERCICIO NO DUDES Y PONTE EN CONTACTO CONMIGO 688-820-933

Te dejo aquí las soluciones sin el procedimiento para que puedas comprobar si lo estas haciendo bien. Recuerda que solo tienes que seguir los mismos pasos que hemos estado haciendo hasta ahora.

El determinante $|A| = A(1-A) = 0 \to A = \begin{cases} A=0 \\ A=1 \end{cases}$

$$\boldsymbol{A \neq 1 \ y \ A \neq 0 \ \to Sistema\ compatible\ determinado}$$

$$\boldsymbol{A=1 \to Sistema\ incompatible}$$

$$\boldsymbol{A=0 \to Sistema\ compatible\ indeterminado}$$

Piden resolverlo cuando $A=4, es\ decir, estamos\ trabajando\ con\ un\ S.C.D. \to CRAMER$

$$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n \to (x,y,z) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)}$$

JUNIO 2012 B1.- Para cada par de números reales (a, b), se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \ y \ B = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calcular los determinantes de las matrices A y B.
- Para $a = b = 1$, calcular el determinante de la matriz producto $A \cdot B$
- Obtener, razonadamente, para que valores de a y b ninguna de las dos matrices tiene matriz inversa

¡PRUEBA TU!

SI NECESITAS MAS AYUDA CON EL EJERCICIO NO DUDES Y PONTE EN CONTACTO CONMIGO 688-820-933

Te dejo aquí las soluciones sin el procedimiento para que puedas comprobar si lo estas haciendo bien. Recuerda que solo tienes que seguir los mismos pasos que hemos estado haciendo hasta ahora.

$$\boldsymbol{det(A)} = \begin{vmatrix} a & b & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{10}\boldsymbol{a} - \mathbf{8}\boldsymbol{b} + \mathbf{4}$$

$$\boldsymbol{det(B)} = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{a} - \mathbf{4}\boldsymbol{b} + \mathbf{6}$$

El determinante de la multiplicación de A con B es igual a la multiplicación de los determinantes de A y B, es decir,

$$|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = (\mathbf{10}\boldsymbol{a} - \mathbf{8}\boldsymbol{b} + \mathbf{4}) \cdot (-\boldsymbol{a} - \mathbf{4}\boldsymbol{b} + \mathbf{6}) \rightarrow \boldsymbol{en\ este\ caso\ a = b = 1} \rightarrow |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = \mathbf{6}$$

Para que las matrices no tengan inversas sus determinantes tienen que ser igual a cero, por tanto,

hacemos un sistema con $\rightarrow \begin{cases} |\boldsymbol{A}| = \mathbf{0} \\ |\boldsymbol{B}| = \mathbf{0} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{de\ este\ sistema\ deducimos} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \\ \boldsymbol{b} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} \end{cases}$

JULIO 2012 A1.- Dado el sistema

$$\begin{cases} (m-1)+y+z=m \\ x+(m-1)y+z=0 \\ y+z=1 \end{cases}$$

- Discutirlo según los valores del parámetro m
- Resolverlo, si es posible, para los casos $m=0\ y\ m=3$

¡PRUEBA TU!

SI NECESITAS MAS AYUDA CON EL EJERCICIO NO DUDES Y PONTE EN CONTACTO CONMIGO 688-820-933

Te dejo aquí las soluciones sin el procedimiento para que puedas comprobar si lo estas haciendo bien. Recuerda que solo tienes que seguir los mismos pasos que hemos estado haciendo hasta ahora.

El determinante $|A|=(m-2)(m-1)=0 \rightarrow m=\begin{cases} m=2 \\ m=1 \end{cases}$

$$\boldsymbol{m \neq 2\ y\ m \neq 1\ \rightarrow Sistema\ compatible\ determinado}$$

$$\boldsymbol{m=1 \rightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado}$$

$$\boldsymbol{m=2 \rightarrow Sistema\ incompatible}$$

Piden resolverlo cuando $m=0, es\ decir, estamos\ trabajando\ con\ un\ S.C.D. \rightarrow CRAMER$

$$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n \rightarrow (x,y,z)=(1,1,0)}$$

Piden resolverlo cuando $m=3, es\ decir, estamos\ trabajando\ con\ un\ S.C.D. \rightarrow CRAMER$

$$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n \rightarrow (x,y,z)=(1,-2,3)}$$

JULIO 2012 B1.- Sea B la matriz $B = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ $e\ I\ la\ matriz\ identidad.$

- Hallar para que valores de m se verifica que $B^2 = 2B + I$
- Calcular la inversa de B para los valores de m del apartado anterior.

Para el primer apartado primero debes de calcular B^2:

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2m+m^2 & 2 \\ 2 & 2-2m+m^2 \end{pmatrix}$$

Lo siguiente que debes de calcular es $2B + I$

$$2B + I \rightarrow 2\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2+2m & 2 \\ 2 & 2-2m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}$$

Finalmente tenemos que igualar los dos resultados que hemos obtenido y verificar que podemos encontrar un valor de m que haga que la igualdad se cumpla:

$$\begin{pmatrix} 2+2m+m^2 & 2 \\ 2 & 2-2m+m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$2+2m+m^2 = 3+2m \rightarrow m^2 = 1 \rightarrow m = \pm 1$$

$$2-2m+m^2 = 3-2m \rightarrow m^2 = 1 \rightarrow m = \pm 1$$

Como se puede comprobar, para $m = \pm 1$ se cumple la igualdad.

Ahora tienes que calcular la inversa cuando $m = 1\ y\ cuando\ m = -1$

- $\boldsymbol{m = -1}$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Puedes seguir el procedimiento que mejor domines para el calculo de la inversa de la matriz A:

$$\boldsymbol{B \cdot B^{-1} = I \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\begin{cases} c = 1 \\ a + 2c = 0 \\ d = 0 \\ b + 2d = 1 \end{cases} \rightarrow}$$

Ahora con las dos ecuaciones amarillas haces un sistema:

$$\boldsymbol{\begin{cases} c = 1 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = -2 \end{cases}}$$

Con las dos ecuaciones verdes tienes que hacer otro sistema:

$$\boldsymbol{\begin{cases} d = 0 \\ b + 2d = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = 1 \end{cases}}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $m = 1$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puedes seguir el procedimiento que mejor domines para el calculo de la inversa de la matriz A:

$$B \cdot B^{-1} = I \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ a = 0 \\ 2b + d = 0 \\ b = 1 \end{cases} \rightarrow$$

Ahora con las dos ecuaciones amarillas haces un sistema:

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ a = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + c = 1 \\ a = 0 \end{cases} \rightarrow c = 1$$

Con las dos ecuaciones verdes tienes que hacer otro sistema:

$$\begin{cases} 2b + d = 0 \\ b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2b + d = 0 \\ b = 1 \end{cases} \rightarrow d = -2$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

JUNIO 2011 A1.- Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + 4z = -2 \\ x + 3y + m^2 z = m \end{cases}$$

- Discutir su compatible en función del parámetro m.
- Resolver el sistema para $m = 0$.

¡PRUEBA TU!

JUNIO 2011 B1.-Dada la matriz A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Contestar razonadamente a la siguiente pregunta ¿Existe algún valor de a tal que A no tenga inversa para ese valor?
- Calcular, en caso de que sea posible, la matriz inversa de $A^2\ para\ a = 0$.

Para que una matriz no tenga inversa su determinante tiene que ser igual a cero, por tanto, lo que tenemos que hacer es calcular el determinante de la matriz e igualarlo a cero. De esta manera determinaremos los valores para los que la matriz no tiene inversa. Para el resto de los valores si que tendrá.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 - 1 = 0 \rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Por tanto, podemos afirmar lo siguiente: $\rightarrow \begin{cases} Cuando\ a = \pm 1 \rightarrow No\ tiene\ inversa \\ Cuando\ a \neq \pm 1 \rightarrow Si\ tiene\ inversa \end{cases}$

Ahora quiere que calculemos la matriz inversa de $A^2\ para\ a = 0$, primero calculamos A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A_{adj}\right)^t$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(A_{adj}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

JULIO 2011 A1.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S = \begin{cases} mx + 2y = 3 \\ -x + 2mz = -1 \\ 3x - y - 7z = m + 1 \end{cases}$$

Discutir el sistema para los distintos valores de m. Si existen casos de indeterminación resolver en dichos casos. Si no existen explicar porqué.

¡PRUEBA TU!

JULIO 2011 B1.- A es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica la igualdad matricial

$$A\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Calcular de forma razonada la matriz A.

$$A\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow A\left[\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ahora debemos de calcular la inversa de la matriz $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix} \rightarrow$

Para hacer este calculo, debemos plantearlo con la definición de inversa:

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a + 3c = 1 \\ 2a + 7c = 0 \\ b + 3d = 0 \\ 2b + 7d = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + 3c = 1 \\ 2a + 7c = 0 \end{cases} \rightarrow$$

Con el método de reducción calculamos a y c;

$$\begin{cases} a + 3c = 1 \\ 2a + 7c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a - 6c = -2 \\ 2a + 7c = 0 \end{cases} \rightarrow c = -2$$

$$Sabiendo\ que\ c = -2 \rightarrow a = 7$$

Hacemos el mismo procedimiento, pero con ... $\begin{cases} b + 3d = 0 \\ 2b + 7d = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2b - 6d = 0 \\ 2b + 7d = 1 \end{cases} \rightarrow d = 1$

$$Sabiendo\ que\ d = -2 \rightarrow b = -3$$

Por tanto, la inversa será: $\begin{pmatrix}7 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

JULIO 2010 A1.- Discutir el siguiente sistema en función del parámetro a:

$$S = \begin{cases} ax - y + 2z = 1 \\ x - 2y = 0 \\ ax + y - z = 1 \end{cases}$$

Resolverlo para $a = 1$

¡PRUEBA TU!

JULIO 2010 B1.-Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones

$$S=\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

En función del parámetro a.

Resolverlo en los casos de indeterminación.

¡PRUEBA TU!

JUNIO 2010 A1.- Se considera el sistema de ecuaciones lineales que sigue:

$$S = \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ ax + y + 2z = a + 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Discutir su compatibilidad en función del parámetro a

Resolver el sistema para $a = 0$.

¡PRUEBA TU!

JUNIO 2010 B1.-Discutir la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro a:

$$S=\begin{cases}2x+y+3z=2\\3x-2y-z=3\\ax-y+2z=a\end{cases}$$

Resolver el sistema en el caso de indeterminación.

Lo primero que tienes que hacer es transformar el sistema en una matriz;

$$\begin{cases}2x+y+3z=2\\3x-2y-z=3\\ax-y+2z=a\end{cases}\rightarrow\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 2\\3 & -2 & -1 & 3\\a & -1 & 2 & a\end{pmatrix}$$

Ahora tienes, como siempre, que calcular el determinante de la matriz de coeficientes:

$$det\ (A)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\3 & -2 & -1\\a & -1 & 2\end{vmatrix}=-8-a-9+6a-6-2=0\rightarrow 5a-25=0\rightarrow a=5$$

- $a\neq 5$

$$para\ este\ caso\ puedes\ coger\ como\ norma\ que\ siemore\ \ vas\ a\ estar\ trabajando\ con\ un\ S.C.D\ \rightarrow Solo\ existe\ una\ solución.$$

$$\text{Det}(A_{3x3})\neq 0\rightarrow Rango\ (A)=3$$

$$Det(A^*_{3x3})\neq 0\rightarrow Rango\ (A^*)=3$$

- $a=5$

Ahora vas a estudiar que ocurre cuando m toma el valor de cero. Recuerda que este valor es el que hace que el determinante sea cero, por tanto,

$$\text{Det}(A_{3x3})=0\rightarrow Rango\ (A)<3$$

Ahora tienes que buscar una matriz 2x2 dentro de la matriz de coeficientes que sea distinto de cero para poder afirmar que el rango de A es dos.

Te he marca en morado la matriz que voy a coger para comprobar que el rango es dos:

$$\det(A_{2x2}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \rightarrow rango\ (A) = 2$$

Ahora cuando ya has comprobado que el rango de A es dos, tienes que calcular el rango de la matriz ampliada, para eso tienes que utilizar las dos columnas (Amarillo) que has cogido para hacer el determinante 2x2 de la matriz A y la columna de la ampliada.

$$\det(A^*_{3x3}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 15 - 6 + 20 - 15 + 6 = 0 \rightarrow Rango\ (A^*) = 2$$

Como los rangos son distintos, estas trabajando con un sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Para terminar el ejercicio quiere que calcules la respuesta para un sistema compatible indeterminado, es decir, cuando tiene infinitas soluciones:

Para eso, siempre tienes que seguir este procedimiento;

1. Quitar la fila del sistema que no utilices para demostrar que el rango de A es dos.
2. Llama a la incógnita $z = t$
3. Pasa el parámetro t al otro lado de la igualdad y finalmente resuelve un sistema de ecuaciones con dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\begin{matrix} 2x + y + 3z = 2 \\ 3x - 2y - z = 3 \\ ax - y + 2z = a \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2x + y + 3z = 2 \\ 3x - 2y - z = 3 \\ z = t \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2x + y = 2 - 3t \\ 3x - 2y = 3 + t \end{matrix} \rightarrow Reducción \rightarrow$$

Multiplicamos la primera ecuación por (2) para después con reducción, sumar las ecuaciones y que la incógnita y desaparezca y podamos dar solución a x.

$$\begin{matrix} 4x + 2y = 4 - 6t \\ 3x - 2y = 3 + t \end{matrix}$$

$$7x = 7 - 5t \rightarrow x = \frac{7 - 5t}{7}$$

Sabiendo cual es el valor de x en función de t, podemos hallar $y \rightarrow$

$$2x + y = 2 - 3t \rightarrow 2\left(\frac{7 - 5t}{7}\right) + y = 2 - 3t \rightarrow 14 - 10t + 7y = 14 - 21t \rightarrow y = -\frac{11}{7}t$$