

A1 B1 MATRICES

(JUNIO 2020 A1)

Se considera la ecuación matricial:

$$A \cdot X = A^t \cdot B \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. ¿Qué dimensión debe tener la matriz X?
2. Resuelve la ecuación matricial

(JULIO 2020 B1)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calcular la inversa de la matriz $(A \cdot A^t)$
2. ¿Admite inversa la matriz $(A \cdot A^t)$?
3. Calcular cuando sea posible $A \cdot B$ y $A^t \cdot B$

(JUNIO 2019 B1)

Son las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

- a) Determina la matriz inversa de la matriz $I + B$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
- b) Calcula las matrices X e Y que verifican que:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

CON SOLUCIÓN

(JULIO 2019 A1)

Sean A y B las siguientes matrices; $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Hallar la matriz inversa de $A - B$
- b) Hallar la matriz X tal que $X(A - B) = 2A - 3B$

CON SOLUCIÓN

(JUNIO 2018)

- a) Dadas las matrices $R = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$, determina el valor de las componentes $x > 0$ e y para que se verifique $R^2 = S$, donde $R^2 = R \cdot R$.
- b) Se conoce la longitud, $a = 2$, $b = 3$ y $c = 5$, de un lado de cada rectángulo de la figura X, Y, Z y la otra medida es x, y, z . Determinar x, y, z para que se cumpla:
- La suma del área de los tres rectángulos vale 64.
 - La suma de los perímetros de los rectángulos X e Y vale 34
 - La suma del perímetro de X más dos veces el área de Y vale 48.

Figura X

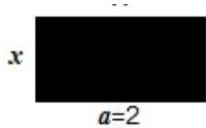
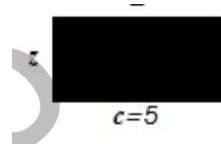


Figura Y



Figura Z



(JULIO 2018)

- a) Calcula los parámetros a, b, c, d para que se cumpla la igualdad $F \cdot G = H \cdot K$ con las siguientes matrices:

$$F = \begin{pmatrix} 1+a-b & -1 \\ 2+b & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3-d \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2 \\ c & -2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}$$

- b) Determina el exponente n de la matriz A para que se cumpla :

$$A^n = \begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix}, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

CON SOLUCIÓN

(JUNIO 2017)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

- ¿Qué valores deben tomar los parámetros desconocidos x, y, z para que se verifique la igualdad matricial $A \cdot B = C$?
- Calcula las componentes de la matriz E^{20} . Pista: aprovecha las simetrías en la matriz E o el cálculo de sus primeras potencias para identificar un patrón.

CON SOLUCIÓN

(JULIO 2017)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$. encontrar las componentes de las matrices de dimensión 2×2 , $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ y $H = \begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix}$ para que se cumplan las siguientes igualdades matriciales:

- a) $A M B = C$
- b) $A H B^{-1} = C$

CON SOLUCIÓN**(JUNIO 2016)**

Considerense las siguientes matrices y los parametros desconocidos u y v :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Determinar los valores de los parametros α, β, u y v para que se cumpla la siguiente igualdad matricial, siendo B^t la matriz traspuesta de B .

$$A \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} B^t + C \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = D$$

- b) Siendo A^{-1} la matriz inversa de A , encontrar los valores de las constantes a y b que verifiquen:

$$A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

CON SOLUCIÓN**(JULIO 2016)**

- a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ a & b \end{pmatrix}$, determinar los valores de los parametros a y b para que se verifique la ecuacion matricial $A^2 = 2A$.
- b) Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz $D = B^{50} \cdot C^t$

(JUNIO 2015)

- a) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz X para la que se verifica la ecuación matricial $AX = B - C$
- b) Halla la matriz Y para la que se verifica la ecuación matricial $YA = B^2$

CON SOLUCION

(JULIO 2015)

- a) Calcular los valores de a, b, c, d, que verifiquen la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 2a - 2 & 2b \\ c + 1 & d + 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & d - 2 \\ 2c & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular A^{20} . Razona tu respuesta.

CON SOLUCION

(JUNIO 2014 A1)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz X para la que se verifica la ecuación matricial $XA^2 = B$

Hallar la matriz A^{17} . Razona el procedimiento.

CON SOLUCIÓN

(JULIO 2014 B1).- Calcular las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matricial:

$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Hallar la matriz $X^2 + Y^2$

CON SOLUCIÓN

(JULIO 2013 B1) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$. Hallar las matrices X, Y, para que se cumpla el siguiente sistema matricial:

$$\begin{cases} 2X + Y = A \\ -3X + 2Y = B \end{cases}$$

Siendo A^t la matriz traspuesta de la matriz A, calcular el producto $A \cdot B \cdot A^t$

CON SOLUCIÓN

JUNIO 2013 B1.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, y la ecuación $2A^2 + xA - yI = 0$. Calcular los valores de x e y para los que se verifica dicha ecuación.

Hallar la matriz X para la que se verifica la siguiente ecuación matricial:

$$A + 2X = 3A^t$$

CON SOLUCIÓN

JUNIO 2012 B1.- Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra la matriz X que cumpla la ecuación $BX = A + B$

Siendo A^t la matriz traspuesta de la matriz A, calcula AXA^t

CON SOLUCIÓN

JULIO 2012 B1.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, y la ecuación $A^2 - xA - yI = 0$. Calcular los valores de x e y para que se verifique la ecuación.

Hallar la matriz X para la que se verifica la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} + 2X$$

CON SOLUCIÓN

JULIO 2011 A1.- Un individuo invirtió un total de 60000 € en tres empresas (A, B , C) y obtuvo 4500 € de beneficio. Averiguar cuanto invirtió en cada una de ellas, sabiendo que la cantidad invertida en A fue el doble que en B y C juntas y que las rentabilidades fueron; el 5% en A, el 10% en B y el 20% en C.

JUNIO 2011 B1.- Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz inversa de $A - I$

Hallar la matriz B tal que $A + B = AB$

CON SOLUCIÓN

JUNIO 2010 B1.- En la exposición de un establecimiento de material de oficina hay 400 unidades, entre lámparas, sillas y mesas, con un valor total de 15000€. Si el valor de una lámpara es de 16€, el de una silla 50€ y el de una mesa 80€, y , además, hay tantas lámparas como sillas y mesas juntas, ¿Cuantas lámparas, sillas y mesas hay en la exposición?.

JULIO 2010 B1.- Unos grandes almacenes desean liquidar 200 camisas y 100 pantalones de la temporada anterior. Para ello lanzan dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón, que se vende a 30€; la oferta B consiste en un lote de tres camisas y un pantalón, que se vende a 50€. Se van a poner a la venta al menos 20 lotes de la oferta A y al menos 10 lotes de la B. Averiguar cuantos lotes debe vender de cada tipo para la ganancia sea máxima.

JUNIO 2010 A1.-Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices BAC y A^tC

Los valores que deben tener a y b para que se cumpla que $BAC = A^tC$

CON SOLUCIÓN

SOLUCIONES

(JUNIO 2019)

Sena las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

- c) Determina la matriz inversa de la matriz $I + B$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
d) Calcula las matrices X e Y que verifican que:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

Lo primero que tienes que hacer es calcular la matriz $I + B$

$$I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora tienes que hacer la inversa de esa matriz, puedes elegir el procedimiento que te de la gana, yo voy a aplicar la definicion de inversa:

$$(I + B)^{-1}(I + B) = I$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a+b & 3b \\ 2c+d & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora con lo que te acabo de subrayar (Azul y Verde) vas hacer un sistema de ecuaciones para despejar los parametros:

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 3b = 0 \end{cases} \rightarrow b = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Ahora con los otros colores (Rojo y Amarillo) haces otro sistema para sacar el resto de parametros:

$$\begin{cases} 2c + d = 0 \\ 3d = 1 \end{cases} \rightarrow d = \frac{1}{3} \rightarrow c = -\frac{1}{6}$$

Entonces;

$$(I + B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ahora para el siguiente apartado, tienes que resolver un sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases} \rightarrow \text{ahora observa y aplica el metodo de sustitución:}$$

$$AX + BY = C \rightarrow Y + BY = C \rightarrow (I + B)Y = C \rightarrow Y = (I + B)^{-1}C$$

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{11}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora lo siguiente que tienes que hacer para terminar es calcular el valor de la incognita X;

$$AX = Y \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}Y \rightarrow X = A^{-1}Y$$

¡Cuidado! Ahora tienes que calcular la inversa de la matriz A, usa el procedimiento que quieras;

$$A^{-1}A = I \rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x & y \\ 2z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}Y \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \frac{11}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{11}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(JULIO 2019)

Sean A y B las siguientes matrices; $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- c) Hallar la matriz inversa de $A - B$
- d) Hallar la matriz X tal que $X(A - B) = 2A - 3B$

Lo primero que tienes que hacer es calcular la matriz A menos la matriz B:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa puedes hacerlo siguiendo el procedimiento que mas te interese o el que mejor sepas hacer, en este caso voy a utilizar la definición de inversa:

$$(A - B)^{-1}(A - B) = I \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a+b & a+d \\ 2c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Ahora con lo que te acabo de subrayar (Azul y Verde) vas hacer un sistema de ecuaciones para despejar los parametros:

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Ahora por reducción} \rightarrow a = 1 \rightarrow b = -1$$

Ahora con los otros colores (Morado y Amarillo) haces otro sistema para sacar el resto de parametros:

$$\begin{cases} 2c + d = 0 \\ c + d = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Reducción para resolverlo} \rightarrow c = -1 \rightarrow d = 2$$

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora tienes que resolver la siguiente ecuación matricial;

$$X(A - B) = 2A - 3B$$

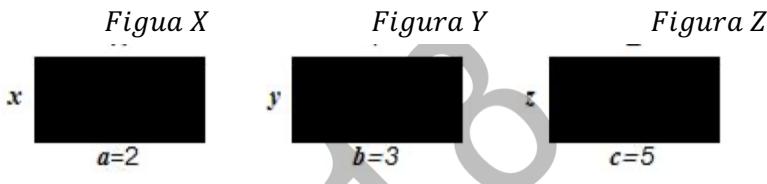
$$X(A - B)(A - B)^{-1} = (2A - 3B)(A - B)^{-1}$$

$$X = (2A - 3B)(A - B)^{-1}$$

$$X = [2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(JUNIO 2018)

- a) Dadas las matrices $R = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$, determina el valor de las componentes $x > 0$ e y para que se verifique $R^2 = S$, donde $R^2 = R \cdot R$.
- b) Se conoce la longitud, $a = 2$, $b = 3$ y $c = 5$, de un lado de cada rectángulo de la figura X, Y, Z y la otra no x, y, z. Determinar x, y, z para que se cumpla:
- La suma del área de los tres rectángulos vale 64.
 - La suma de los perímetros de los rectángulos X e Y vale 34
 - La suma del perímetro de X más dos veces el área de Y vale 48.



Lo primero que tienes que hacer en este ejercicio que a simple vista puede asustar, es leerlo detenidamente y empezar por el principio, paso por paso.

Lo primero que quiere que calcules es los valores de los parámetros, x e y para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$R^2 = S \rightarrow R \cdot R = S \rightarrow \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^2 + 3x - 3 & 3x + 9y \\ -x + x^2 - 3y + 3xy & -3 + 3x + 9y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 3 = 1 \\ 3x + 9y = -15 \\ -x + x^2 - 3y + 3xy = 0 \\ 9y^2 + 3x - 3 = 36 \end{cases} \rightarrow \text{Resolviendo la primera ecuación} \rightarrow x = 1 \text{ y } x = -4$$

pero como el enunciado dice que la x tiene que ser mayor que cero, la única solución es

$$x = 1$$

Ahora sabiendo el valor del parámetro x tienes que calcular el valor de y;

$$3x + 9y = -15 \rightarrow y = \frac{-15 - 3x}{9} \rightarrow y = \frac{-15 - 3}{9} \rightarrow y = -2$$

Ahora viene lo que quizás te de un poco de miedo, resolver la segunda parte del ejercicio:

Este ejercicio para llegar a la solución correcta solo requiere de paciencia.

La suma del área de los tres rectángulos vale 64 $\rightarrow 2x + 3y + 5z = 64$

PROGRAMACIÓN LINEAL Y MATRICES _ENUNCIADOS_SOLUCIONES

La suma de los perimetros de los rectangulos X e Y vale 34 $\rightarrow 4 + 2x + 6 + 2y = 34 \rightarrow 2x + 2y = 24$

La suma del perimetro de X mas dos veces el area de Y vale 48 $\rightarrow 4 + 2x + 6y = 48 \rightarrow 2x + 6y = 44$

Ahora si puedes utilizar el método de reducción con las dos ultimas ecuaciones y sacar los parámetros x e y:

$$2x + 2y = 24$$

$$2x + 6y = 44$$

$$-4y = -20 \rightarrow y = 5$$

Sabiendo que $y = 5 \rightarrow 2x + 2y = 24 \rightarrow 2x = 24 - 10 \rightarrow x = 7$

Por ultimo, para sacar el valor de z, tienes que ir a la primera ecuación y sustituir:

$$2x + 3y + 5z = 64 \rightarrow 2(7) + 3(5) + 5z = 64 \rightarrow z = 7$$

(JULIO 2018)

- a) Calcula los parametros a, b, c, d para que se cumpla la igualdad $F \cdot G = H \cdot K$ con las siguientes matrices:

$$F = \begin{pmatrix} 1+a-b & -1 \\ 2+b & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3-d \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2 \\ c & -2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}$$

- b) Determina el exponente n de la matriz A para que se cumpla :

$$A^n = \begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix}, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo primero que tienes que hacer son las multiplicaciones a ambos lados de la igualdad para poder posteriormente, igualar las dos matrices y determinar el valor de los parámetros:

$$F \cdot G = H \cdot K \rightarrow \begin{pmatrix} 1+a-b & -1 \\ 2+b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2 \\ c & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 - 2a + 2b - 4 & 1 + a - b - 3 + d \\ -4 - 2b + 4 & 2 + b + 3 - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a - 2 - 2b & 4a + 4 - 6 \\ -c - 2b & 2c - 6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2a + 2b - 6 = -2a - 2b - 2 \\ a - b + d - 2 = 4a - 2 \\ -2b = -c - 2b \\ b - d + 5 = 2c - 6 \end{array} \right. \rightarrow \text{con la primera ecuación} \rightarrow 4b = 4 \rightarrow b = 1$$

Sabiendo que el parámetro b tiene valor 1, puedes despejar de la tercera ecuación, el valor de c;

$$-2b = -c - 2b \rightarrow c = 0$$

Ahora en la ultima ecuación; $b - d + 5 = 2c - 6 \rightarrow 1 - d + 5 = -6 \rightarrow d = 12$

Por último, en la segunda ecuación: $a - b + d - 2 = 4a - 2 \rightarrow -3a = b - d + 2 - 2 \rightarrow$

$$a = \frac{11}{3}$$

NO DUDES NUNCA DE ESTE TIPO DE RESULTADOS Y MENOS EN LA SELECTIVIDAD, LO HACEN PARA QUE PIERDAS EL TIEMPO Y TE PONGAS NERVISO.

Para terminar con el ejercicio, en el apartado b, quiere que le digas cual tiene que ser el exponente de la matriz A para que se cumpla;

$$A^n = \begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix}, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Como puedes comprobar, dependiendo de si el exponente es par o impar, tienes un resultado o un patron diferente, por eso, quiero que te centres únicamente en el que a ti te interesa, que es un exponente par, ya que 20 es un numero par. Y ademas de eso, tambien quiero que preste especial atención al signo, ya que en los exponentes pares el signo es alterno. Entonces;

Como tu estas trabajando con una matriz de exponente par y el resultado del signo es negativo, la vas a comparar con $A^2, A^6 \dots$

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & -2^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix}$$

$$-2^{\frac{n}{2}} = -2048 \rightarrow 2^{\frac{n}{2}} = 2048 \rightarrow \frac{n}{2} = \log_2 2048 \rightarrow \frac{n}{2} = 11 \rightarrow n = 22$$

(JUNIO 2017)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

- ¿qué valores deben tomar los parametros desconocidos x,y,z para que se verifique la igualdad matricial $A \cdot B = C$?
- Calcula las componentes de la matriz E^{20} . Pista: aprovecha las simetrias en la matriz E o el calculo de sus primera potencias para identificar un patron.

Lo primero que tienes que hacer, es plantear la igualdad y realizar los cálculos:

$$\begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x + 6y & 2x - 6 \\ -9 - 5y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora lo siguiente que tienes que hacer, es igualar las dos matrices, para componente a componente ir determinando los parámetros:

$$3x + 6y = 9$$

$$2x - 6 = z$$

$$-9 - 5y = -z \rightarrow z = 9 + 5y$$

$$-1 = -1$$

Con las dos ecuaciones que tienes en amarillo; $2x - 6 = 9 + 5y$

Ahora con las dos ecuaciones que están subrayadas en verde, puedes hacer un sistema para determinar el valor del parámetro x e y;

$$\begin{cases} 3x + 6y = 9 \\ 2x - 5y = 15 \end{cases} \text{ con primera ecuación} \rightarrow x = 3 - 2y \rightarrow 2(3 - 2y) - 5y = 15 \rightarrow -9y = 9$$

$$\rightarrow y = -1$$

$$\text{Por tanto, } x = 3 - 2(-1) \rightarrow x = 5$$

Ahora sabiendo estos parámetros, puedes calcular el valor de z;

$$z = 2x - 6 \rightarrow z = 10 - 6 \rightarrow z = 4$$

En el apartado b, el ejercicio quiere que calcules la potencia 20 de la matriz E, por tanto,

$$E^2 = E \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E^3 = E^2 \cdot E = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$E^4 = E^3 \cdot E = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Como puedes comprobar, tal y como te adelanta el enunciado, tienes que diferenciar entre las matrices de potencia par y de las que tienen potencia impar:

$$E^n \rightarrow n: par \rightarrow E^n = \begin{pmatrix} \frac{n}{2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2} \end{pmatrix}$$

Como el enunciado quiere que calcules $E^{20} = \begin{pmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{pmatrix}$

(JULIO 2017)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$. encontrar las componentes de las matrices de dimensión 2×2 , $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ y $H = \begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix}$ para que se cumplan las siguientes igualdades matriciales:

- a) $AMB = C$
- b) $AHB^{-1} = C \rightarrow AH = CB$

Lo primero que vas hacer en este caso es calcular la matriz inversa de B y la inversa de A, ya que las vas a necesitar, en este caso lo hare aplicando la definicion de inversa:

$$B \cdot B^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ -2a+2c & -2b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+3c = 1 \\ -2a+2c = 0 \\ b+3d = 0 \\ -2b+2d = 1 \end{cases}$$

Ahora con lo que esta subrayado de amarillo vas hacer un sistema y con lo que esta de verde otro sistema para sacar los elementos que forman la matriz inversa de B:

Sistema amarillo:

$$a = 1 - 3c \rightarrow -2(1 - 3c) + 2c = 0 \rightarrow -2 + 6c + 2c = 0 \rightarrow c = \frac{1}{4}$$

$$a = 1 - 3 \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

Sistema verde:

$$b = -3d \rightarrow -2(-3d) + 2d = 1 \rightarrow 6d + 2d = 1 \rightarrow d = \frac{1}{8}$$

$$b = -3 \cdot \frac{1}{8} \rightarrow b = \frac{-3}{8}$$

Por tanto,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Ahora tienes que calcular la inversa de la matriz A, para este caso voy a utilizar un procedimiento diferente, lo hare con GAUSS (hacer ceros):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{la primera fila entre } 2 \text{ y la segunda fila entre } -1 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Por tanto la inversa de la matriz A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora con toda esta informacion lo unico que tienes que hacer es despejar bien de cada una de las ecuaciones matriciales la incognita correspondiente:

$$A M B = C \rightarrow M = A^{-1} C B^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A H B^{-1} = C \rightarrow H = A^{-1} C B$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ -13 & 49 \end{pmatrix}$$

(JUNIO 2016)

Considerense las siguientes matrices y los parametros desconocidos u y v :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Determinar los valores de los parametros α, β, u y v para que se cumpla la siguiente igualdad matricial, siendo B^t la matriz traspuesta de B.

$$A \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} B^t + C \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = D$$

- b) Siendo A^{-1} la matriz inversa de A, encontrar los valores de las constantes a y b que verifiquen:

$$A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} B^t + C \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = D$$

→ Lo primero intercambia la informacion que tienes en la ecuacion:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\alpha & -\beta \\ -3\alpha & 3\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\alpha \\ 4\beta & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\beta & 2\alpha - 2\beta \\ 6\beta & 3\alpha + 6\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\alpha \\ 4\beta & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\beta & -2\beta \\ 10\beta & 2\alpha + 6\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2\beta = 2 \\ -2\beta = u \\ 10\beta = v \\ 2\alpha + 6\beta = -2 \end{cases} \rightarrow \boxed{\beta = -1 ; u = 2 ; v = -10 ; \alpha = 2}$$

Para el segundo apartado es algo muy parecido, pero con otro tipo de operaciones:

$$A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Primero tienes que calcular la inversa de A:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a - c = 1 \\ -3a + 3c = 0 \\ 2b - d = 0 \\ -3b + 3d = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Resolviendo: } \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Ahora cuando ya tienes la inversa, hacer los cálculos es relativamente sencillo:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a + \frac{b}{3} \\ a + \frac{2b}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b + 1 \\ -a + 2b + 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + \frac{b}{3} = 2b + 1 \\ a + \frac{2b}{3} = -a + 2b + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a + b = 6b + 3 \\ 3a + 2b = -3a + 6b + 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a - 5b = 3 \\ 6a - 4b = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6a - 10b = 6 \\ 6a - 4b = 6 \end{cases}$$

Ahora aplicando el método de reducción y restando la primera ecuación con la segunda:

$$-6b = 0 \rightarrow b = 0 \quad \text{entonces} \quad a = 1$$

(JUNIO 2015)

- c) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz X para la que se verifica la ecuación matricial $AX = B - C$
- d) Halla la matriz Y para la que se verifica la ecuación matricial $YA = B^2$

Estos ejercicios los puedes hacer de dos formas diferentes:

1. Reolviendo la ecuacion matricial utilizando la definicion de inversa:

$$AX = B - C \rightarrow X = A^{-1}(B - C)$$

2. Realizando un sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tu decides el metodo que mejor sabes hacer, pero ambos caminos tienen que llevarte al mismo resultado. Yo lo hare en este caso siguiendo el segundo camino:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a+c = -3 \\ -c = -4 \\ 2b+d = 5 \\ -d = 8 \end{cases} \rightarrow c = 4 ; d = -8 ; a = \frac{-7}{2} ; b = \frac{13}{2}$$

$$X = \begin{pmatrix} -7/2 & 13/2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

En el siguiente apartado tienes que calcular la matriz Y. En este caso voy a utilizar el calculo de la inversa para hacerlo.

$$YA = B^2 \rightarrow Y = B^2 A^{-1}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

El calculo de la inversa de la matriz A:

$$AA^{-1} = I \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+c = 1 \\ -c = 0 \\ 2b+d = 0 \\ -d = 1 \end{cases} \rightarrow c = 0; a = \frac{1}{2}; d = -1; b = \frac{1}{2} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(JULIO 2015)

c) Calcular los valores de a, b, c, d , que verifiquen la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 2a - 2 & 2b \\ c + 1 & d + 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & d - 2 \\ 2c & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular A^{20} . Razona tu respuesta.

$$\begin{pmatrix} 2a - 2 & 2b \\ c + 1 & d + 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & d - 2 \\ 2c & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a + 2 & 2b + d - 2 \\ 3c + 1 & 2a + d + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a + 2 = a \rightarrow a = -2 \\ 3c + 1 = 4 \rightarrow c = 1 \\ 2b + d - 2 = b \rightarrow b + d = 2 \rightarrow b = 0 \\ 2a + d + 2 = 0 \rightarrow d = 2 \end{cases}$$

Para realizar el segundo apartado de este ejercicio tienes que ver el patrón que se da en las primeras potencias de la matriz de A:

$$A^2 = AA \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Practicamente ya puedes ver el patrón que se está desarrollando;

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{si } n \text{ es } 20 \rightarrow A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -20 & 1 \end{pmatrix}$$

(JUNIO 2014 A1)

Sé las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz X para la que se verifica la ecuación matricial $XA^2 = B$

Hallar la matriz A^{17} . Razona el procedimiento.

Para resolver la primera pregunta que nos hace el ejercicio, tienes que despejar la incógnita X de la siguiente ecuación matricial:

$$XA^2 = B \rightarrow X = B(A^2)^{-1}$$

Date cuenta que primero tienes que calcular $A^2 = A \cdot A$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora tienes que calcular la inversa de la matriz que acabas de calcular, puedes hacer el procedimiento que te de la gana:

$$(A^2)^{-1} \cdot A^2 = I \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a - 2b & b \\ c - 2d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora con lo que te acabo de subrayar (Azul y Verde) vas hacer un sistema de ecuaciones para despejar los parametros:

$$\begin{cases} a - 2b = 1 \\ b = 0 \end{cases} \rightarrow b = 0 \rightarrow a = 1$$

Ahora con los otros colores (Morado y Amarillo) haces otro sistema para sacar el resto de parametros:

$$\begin{cases} c - 2d = 0 \\ d = 1 \end{cases} \rightarrow d = 1 \rightarrow c = 2$$

$$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = B(A^2)^{-1} \rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ahora tienes que hallar la matriz A^{17} , para eso tienes que realizar varios cálculos: A^2, A^3, A^4, \dots

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces, tienes que diferenciar cuando el exponente es par e impar:

$$n \rightarrow \text{par} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix} \quad n \rightarrow \text{impar} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ n & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces; } A^{17} \rightarrow n \text{ es impar entonces} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 17 & -1 \end{pmatrix}$$

(JULIO 2014 B1).- Calcular las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matricial:

$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Hallar la matriz $X^2 + Y^2$

Para resolver este sistema de ecuaciones matriciales, el método que te aconsejo que utilices es el de reducción;

$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \text{multiplico por 2 a la segunda ecuación} \quad \begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ 4X + 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$5X = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabiendo ahora que la matriz X tiene ese valor, solo tienes que despejar la incognita "y";

$$X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \frac{\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - X}{-2} \rightarrow Y = \frac{\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} \rightarrow$$

$$Y = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora el ejercicio quiere que hagamos una operación muy sencilla;

$$X^2 + Y^2$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Y^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(JULIO 2013 B1) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$. Hallar las matrices X, Y, para que se cumpla el siguiente sistema matricial:

$$\begin{cases} 2X + Y = A \\ -3X + 2Y = B \end{cases}$$

Siendo A^t la matriz traspuesta de la matriz A, calcular el producto $A \cdot B \cdot A^t$

Lo primero que vas hacer es resolver el problema utilizando en este caso el metodo de reduccion:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 2X + Y = A \\ -3X + 2Y = B \end{cases} \rightarrow x(-2)a \text{ la primera ecuación} \rightarrow \begin{cases} -4X - 2Y = -2A \\ -3X + 2Y = B \end{cases} \\ \hline -7X = -2A + B \end{array}$$

Ahora tienes que hacer las operaciones correspondientes para despejar el valor de la matriz X, recuerda que un numero si que puede pasar dividiviendo al otro lado de la igualdad:

$$X = \frac{1}{-7} \left[-2 \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} \right] \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora sabiendo X despejamos de cualquiera de las dos ecuaciones la matriz Y:

$$2X + Y = A \rightarrow Y = A - 2X \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Para terminar con el ejercicio, quiere que hagas una operación muy sencilla, multiplicar tres matrices;

$$\begin{aligned} A \cdot B \cdot A^t &= \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 & -50 \\ 111 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -500 & -150 \\ 120 & 135 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

JUNIO 2013 B1.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, y la ecuación $2A^2 + xA - yI = 0$. Calcular los valores de x e y para los que se verifica dicha ecuación.

Hallar la matriz X para la que se verifica la siguiente ecuación matricial:

$$A + 2X = 3A^t$$

Antes de empezar con este ejercicio, quiero que recuerdes que, en este tipo de ejercicios, cuando las letras son minúsculas representan números, cuando las letras son mayúsculas, representan matrices.

Una vez recordado lo anterior, adelante con los cálculos de la siguiente ecuación matricial:

$$2A^2 + xA - yI = 0$$

Fíjate que primeramente necesitas calcular $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

Sabiendo el resultado de esta operación ya casi tienes el ejercicio resuelto, plantea toda la ecuación y resuelve la igualdad:

$$2A^2 + xA - yI = 0 \rightarrow 2 \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x & x \\ 3x & -x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 14 - 2x - y & -6 + x \\ -18 + 3x & 8 - x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 14 - 2x - y = 0 \\ -6 + x = 0 \\ -18 + 3x = 0 \\ 8 - x - y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 6; y = 2$$

La segunda parte del ejercicio quiere que calcules la matriz X para que se verifique la siguiente ecuación matricial:

$$A + 2X = 3A^t \rightarrow 2X = 3A^t - A \rightarrow X = \frac{1}{2}(3A^t - A)$$

$$X = \frac{1}{2} \left[3 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right] \rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

JUNIO 2012 B1.- Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra la matriz X que cumpla la ecuación $BX = A + B$

Siendo A^t la matriz traspuesta de la matriz A, calcula AXA^t

$$BX = A + B$$

Lo primero que tienes que hacer es despejar de forma correcta la matriz X aplicando la inversa de la matriz B, recuerda que el calculo de la matriz inversa lo puedes hacer siguiendo el procedimiento que te de la gana, usa el que mejor sepas hacer;

$$BX = A + B \rightarrow B^{-1}BX = B^{-1}(A + B) \rightarrow X = B^{-1}(A + B)$$

¿Cómo calcula la inversa de la matriz B?

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{Fila 1 menos fila 2} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{Fila 2 mas dos veces fila 1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1}(A + B) \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right) \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ahora el ejercicio quiere que hagas unas multiplicaciones entre matrices muy sencilla, el problema de este apartado es que para hacerlo, tienes que tener bien el apartado anterior.

$$\begin{aligned} AXA^t &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^t \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ -20 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & -60 \\ -50 & 75 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

JULIO 2012 B1.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, y la ecuación $A^2 - xA - yI = 0$. Calcular los valores de x e y para que se verifique la ecuación.

Hallar la matriz X para la que se verifica la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} + 2X$$

Lo primero que tienes que hacer es plantear la matriz A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 2x \\ -2x & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x - y = 0 \\ 6 - 2x = 0 \\ -6 + 2x = 0 \\ -3 - x - y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3 ; y = -6$$

Ahora tienes que despejar la incognita X de la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} + 2X$$

$$+ \frac{3}{2}X - 2X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow -\frac{1}{2}X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 16 \\ 0 & -16 & -12 \end{pmatrix}$$

JUNIO 2011 B1.- Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz inversa de $A - I$

Hallar la matriz B tal que $A + B = AB$

Lo primero que tienes que hacer es la resta de la matriz A menos la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora que ya sabes cual es la matriz resultante, tienes que hacer su inversa, recuerda que puedes hacer el procedimiento que te de la gana, elige el que mejor sepas hacer:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{Fila 1} - \text{Fila 2} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{Fila 2} - \text{Fila 1} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Por tanto, después de hacer las transformaciones necesarias, ya tienes la inversa: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Para terminar tienes que calcular la matriz B para que cumpla la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} A + B = AB &\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3+x & 1+y \\ 1+z & 2+t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x+z & 3y+t \\ x+2z & y+2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3+x = 3x+z & -2x-z = -3 \\ 1+z = x+2z & -x-z = -1 \\ 1+y = 3y+t & -2y-t = -1 \\ 2+t = y+2t & -y-t = -2 \end{cases} \rightarrow \text{con las dos primeras ecuaciones} \rightarrow x = 2; z = -1$$

$$\text{Con las dos últimas ecuaciones} \rightarrow y = -1; t = 3 \text{ por tanto; } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Otro procedimiento más sencillo: $A + B = AB \rightarrow A = AB - B \rightarrow A = (A - I)B \rightarrow (A - I)^{-1}A = B$

JUNIO 2010 A1.-Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices BAC y A^tC

Los valores que deben tener a y b para que se cumpla que $BAC = A^tC$

Para empezar tienes que calcular las dos multiplicaciones entre matrices por separado:

$$BAC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & 2+b \\ a+2 & 2+2b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-1+2+b \\ -a-2+2+2b \end{pmatrix}$$

$$A^tC = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+1 \\ -2+b \end{pmatrix}$$

Ahora tienes que igualar los dos resultados que has obtenido y asi poder despejar los valores de los parametros:

$$\begin{pmatrix} -a-1+2+b \\ -a-2+2+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+1 \\ -2+b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} -a-1+2+b = -a+1 \\ -a-2+2+2b = -2+b \end{array} \rightarrow \text{SISTEMA} \rightarrow \begin{array}{l} b=0 \\ a=2 \end{array}$$