A1 B1 TEORIA

PROGRAMACIÓN LINEAL

La idea básica de este tipo de ejercicios: Representar inecuaciones:

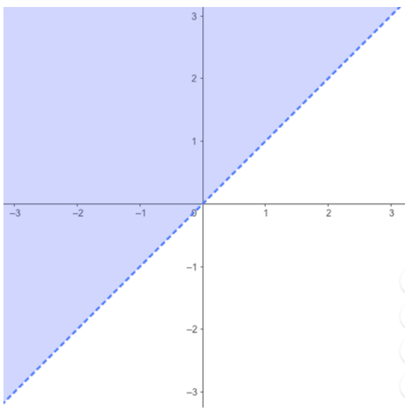
Pasos básicos:

- Encontrar la inecuación de dos incógnitas (x, y).
- Despejar la incógnita y manteniendo el signo de la inecuación en todo momento y sobre todo recordando: $-y > x + 1 \rightarrow y < -x - 1$
- Crear una tabla de valores.

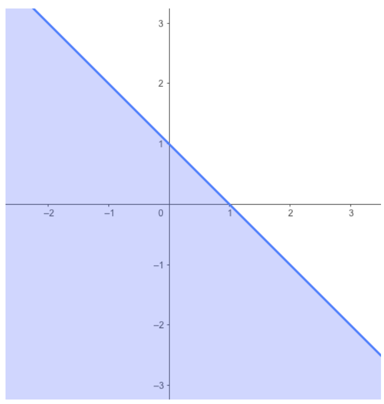
x	y

- Para terminar, después de representar la línea, tenemos que decidir que plano es la solución;

$y > x$



$y \leq -x + 1$



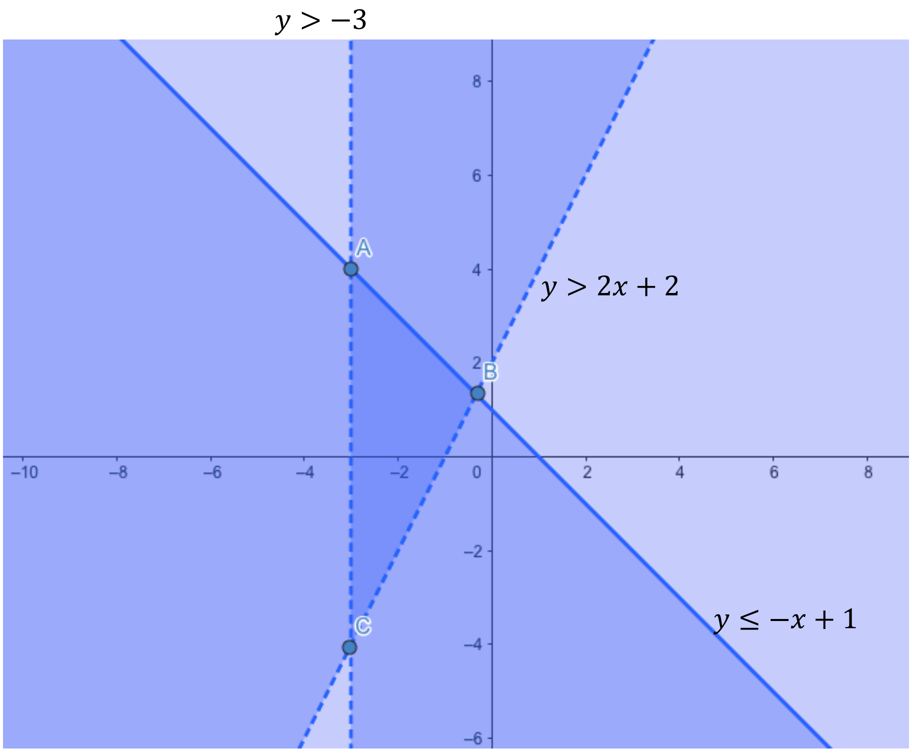
Observad en cada ejemplo el signo de la inecuación cuando el signo tiene el igual $(\leq, \geq)$ la línea se representa como una línea continua, mientras que si no tiene el igual $(<, >)$ la línea se representa en discontinua.

Por otro lado, para saber que parte del plano pintar; ¡Fíjate en la incógnita y, en signo que tiene!:

$$y > \cdots \rightarrow Se\ pinta\ la\ parte\ superior\ del\ plano.$$

$$y < \cdots \rightarrow Se\ pinta\ la\ parte\ inferior\ del\ plano.$$

¡Para determinar los puntos que limitan el área de la solución!



Tenemos que determinar las coordenadas de los puntos A, B y C. Para ellos tenemos que hacer un sistema con las rectas que hacen intersección y crear el punto:

$$A \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ y = -x + 1 \end{cases} \quad B \rightarrow \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \quad C \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

<u>El problema de estos ejercicios suele estar en determinar las inecuaciones de los enunciados.</u>

Cuando el problema nos pide que determinemos el MÁXIMO o mínimo, tenemos que sustituir dichos puntos en la función de optimización y ver que punto da el valor mas grande y el valor mas pequeño.

$$Valor\ grande \rightarrow Máximo$$

$$Valor\ Pequeño \rightarrow Mínimo$$

ALGO FUNDAMENTAL:

$$< significa \rightarrow \begin{cases} menor\ que \\ menos\ que \end{cases} \qquad > significa \rightarrow \begin{cases} mayor\ que \\ mas\ que \end{cases}$$

$$\leq significa \rightarrow \begin{cases} menor\ o\ igual\ que \\ como\ mucho \\ como\ maximo \\ a\ lo\ sumo \end{cases} \qquad \geq significa \rightarrow \begin{cases} mayor\ o\ igual\ que \\ como\ poco \\ como\ minimo \\ al\ menos, por\ lo\ menos \end{cases}$$

MATRICES

Un número por una matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ y \ \lambda = 3$$

$$\lambda \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ y \ B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot z & a \cdot y + b \cdot t \\ c \cdot x + d \cdot z & c \cdot y + d \cdot t \end{pmatrix}$$

La suma o resta de matrices se hace elemento a elemento:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + p & b + q \\ c + r & d + s \end{pmatrix}$$

La matriz traspuesta de otra matriz es intercambiar las filas por las columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Cálculo de la matriz inversa

PRIMER METODO

En general el calculo de la matriz inversa se hace a través de determinantes que por ahora no conoces, sin embargo, cuando las matrices son pequeñas, se puede hacer con un sistema de ecuaciones:

Imagina que tienes $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y quieres calcular A^{-1}, sabiendo que $A \cdot A^{-1} = I$ entonces vamos a resolver el siguiente sistema sabiendo que $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ejemplo:

$$A \cdot A^{-1} = I \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a-3c & 2b-3d \\ -2a+c & -2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a-3c=1 \\ -2a+c=0 \\ 2b-3d=0 \\ -2b+d=1 \end{cases} \rightarrow Resolviendo\ el\ sistema\ con\ las\ dos\ primeras\ ecuaciones \rightarrow$$

$$c=-\frac{1}{2}\ y\ a=-\frac{1}{4}$$

$$Haciendo\ lo\ mismo\ con\ las\ dos\ ultimas\ ecuaciones \rightarrow\ d=-\frac{1}{2}\ y\ \ b=-\frac{3}{4}$$

Por tanto, la expresión de la matriz inversa de A, será: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

SEGUNDO METODO

Para este segundo método utilizaremos el método de Gauss, que consiste en hacer cero, en esta ocasión de una forma un tanto especial:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Como podemos comprobar, se coloca la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a la izquierda y a la derecha la matriz identidad del mismo orden que la matriz sobre la que queremos calcular su inversa.

A continuación, haciendo transformaciones tenemos que lograr obtener la matriz identidad a la izquierda, cuando lo logremos, a la derecha, aparecerá la matriz inversa de la matriz inicial.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to E_1 - 3E_2 \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to E_2 - 2E_1 \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right)$$

Como podemos comprobar, la matriz identidad ha aparecido en la parte de la izquierda, eso quiere decir que, la matriz de la derecha será la matriz inversa de A. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

Este método se puede aplicar a cualquier matriz cuadrada independientemente de su orden.

TERCER METODO

$$A^{-1} = \frac{\left(A_{adj}\right)^t}{|A|}$$

$$|A| = 0 \rightarrow La\ matriz\ no\ tiene\ inversa$$

$$|A| \neq 0 \rightarrow La\ matriz\ si\ tiene\ inversa$$

Recuerda lo que era la matriz de adjuntos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A_{adj} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}\ y\ estas\ operaciones\ tienes\ que\ hacer\ para\ calcular\ A_{adj}$$

Recuerda que la matriz traspuesta de otra matriz es cambiar las filas por columnas.

RANGO DE UNA MATRIZ

Hay que recordar que para calcular el rango de una matriz lo podemos hacer mediante su determinante:

$$|A_{3x3}| \neq 0 \rightarrow Rang(A) = 3$$

$$|A_{3x3}| = 0 \rightarrow Rang(A) < 3$$

En este caso tendríamos que buscar otro determinante $3x3$ o uno de $2x2$ para demostrar que el $rang(A) = 2$

Recordar, por si esto sirviera de ayuda, el rango de una matriz es el numero de filas no nulas, es decir, diferentes de cero.

ECUACION MATRICIAL

Ejemplos:

- $A \cdot X = B$

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

- $X \cdot A = B$

$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$

- $X \cdot A + B - C = D$

$X \cdot A = (D - B + C)$

$X \cdot A \cdot A^{-1} = (D - B + C)A^{-1} \rightarrow \ X = (D - B + C)A^{-1}$

SISTEMAS DE ECUACIONES MATRICIALES

Un sistema sabes como resolverlo, puedes utilizar uno de los tres métodos que ya conoces; sustitución, igualación o reducción. En el caso de los sistemas de ecuaciones matriciales, el método que mas se suele utilizar es reducción. Te enseño un ejemplo.

$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones matriciales, el metodo que te aconsejo que utilices es el de reducción;

$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow multiplico\ por\ 2\ a\ la\ segunda\ ecuación \begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ 4X + 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$5X = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabiendo ahora que la matriz X tiene ese valor, solo tienes que despejar la incognita ''y'';

$$X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \quad Y = \frac{\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - X}{-2} \rightarrow \quad Y = \frac{\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} \rightarrow$$

$$Y = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$